Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 12

$\boxed{16.1.2}$

$$\frac{1}{z^2}e^{-1/z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/z^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^{2n+2}}$$

som konvergerer for alle $|z| > 0$. Dvs. $R = \infty$.

$\boxed{16.1.5}$

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{(z-1)^2} &= \frac{e^{(z-1)+1}}{(z-1)^2} \\ &= e\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} \\ &= \frac{e}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} \\ &= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \\ &= e\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(n+2)!}\end{aligned}$$

som konvergerer for alle $|z-1| > 0$. Dvs. $R = \infty$.

$\boxed{16.1.6}$ Ved delbrøkoppspalting finn vi at

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z-i}.$$

La $g(z) := \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}$. Då er

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}, & g(i) &= \frac{1}{i} + \frac{i}{i^2} = -2i, \\ g'(z) &= -\frac{1}{z^2} - i\frac{2}{z^3}, & g'(i) &= -\frac{1}{i^2} - i\frac{2}{i^3} = 3, \\ &\vdots & &\vdots \\ g^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} + (-1)^n i \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}, & g^{(n)}(i) &= (-1)^n \frac{n!}{i^{n+1}} + (-1)^n i \frac{(n+1)!}{i^{n+2}} \\ & & &= (-1)^n \frac{n! + (n+1)!}{i^{n+1}} \\ & & &= -i^{n+1} n!(n+2). \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(n+2)(z-i)^n \end{aligned}$$

med konvergensradius $R = 1$ (forholdstesten). Vi får no at

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2(z-i)} &= -\frac{1}{z-i} + g(z) \\ &= -\frac{1}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(n+2)(z-i)^n \end{aligned}$$

for $0 < |z-i| < 1$.

$\boxed{\text{16.1.12}}$ Veit at $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$

Finn først taylorrekka til $-\frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z} &= \frac{1}{-i - (z-i)} \\ &= \frac{1}{-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{-i}} \\ &= \frac{1}{-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{-i} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-i)^{n+1}} (z-i)^n \end{aligned}$$

Konvergent for $\left| \frac{z-i}{-i} \right| < 1 \implies$ konvergent for $|z-i| < 1$. Deriverer for å finne taylorrekka til $\frac{1}{z^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= \left(-\frac{1}{z}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{(-i)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(z-i)^n}{(-i)^{n+2}}
\end{aligned}$$

$\implies$ konvergent for $|z-i| < 1$. Polen i $z = 0$ hindrar oss i å få ein større konvergensradius.

Deretter ser vi etter ei laurentrekke for $|z-i| > 1$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z} &= \frac{1}{-i-(z-i)} \\
&= \frac{1}{z-i} \frac{1}{\frac{-i}{z-i} - 1} \\
&= \frac{-1}{(z-i)} \frac{1}{1 - \frac{-i}{z-i}} \\
&= -\frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{z-i}\right)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(z-i)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Denne er konvergent for $\left|\frac{1}{z-i}\right| < 1$, altså for $|z-i| > 1$. Deriverer og får den tilsvarande laurentrekka for $\frac{1}{z^2}$.

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{z}\right)' &= \frac{1}{z^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(-1)^n}{(z-i)^{n+2}}
\end{aligned}$$

Også denne er konvergent for $|z-i| > 1$.

$\boxed{16.2.1}$ Vi veit at $\sin w = 0$ viss og berre viss $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dermed er $\sin^4 \frac{z}{2} = 0$ viss og berre viss $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vi har at

$$\begin{aligned}
\sin \frac{z}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{z}{2} - \frac{z^3}{48} + \cdots,
\end{aligned}$$

så $\sin^4 \frac{z}{2} = \frac{z^4}{16} + \cdots$ og nullpunktet $z_0 = 0$ har dermed orden 4. Ved taylorutvikling av funksjonane $f(z - 2k\pi) = \pm f(z)$ vil ein sjå at også dei andre nullpunkta har orden 4.

$\boxed{16.2.7}$ Vi ser at f har polar av orden to i $z = -2i$ og i $z = i$.

$\boxed{16.2.9}$ Ettersom $\sin z = -\sin(z-\pi)$, er

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi} = -\frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi}.$$

Polen $z = \pi$ kan fjernast ved å definere $f(\pi) = 1$.

$\boxed{16.3.1}$ Funksjonen

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^6}$$

har ein pol i $z = 0$ av 5. orden (ikkje 6. orden på grunn av felles nullpunkt i $z = 0$ for teljar og nemnar). Finn residyen ved å sjå på laurentrekka:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{z^5} - \frac{2^3}{3!z^3} + \frac{2^5}{5!z} - \dots \end{aligned}$$

Får dermed at

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{2^5}{5!} = \frac{4}{15}$$

$\boxed{16.3.4}$ Laurentrekka er

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{1-z}\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(1-z)^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \cdots . \end{aligned}$$

Funksjonen har ein essensiell pol i $z = 1$. Residyen til f i $z = 1$ er koeffisienten til leddet $\frac{1}{z-1}$. Dvs.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1.$$

$\boxed{16.3.6}$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,dz &= \oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5}\,dz \\ &= \oint_C \frac{z-23}{(z-5)(z+1)}\,dz \end{aligned}$$

Integranden har singularitetar i $z = 5$ of $z = -1$ av første orden som begge ligg innanfor kurva C. Delbrøkoppspaltar:

$$\frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = \frac{-3}{z-5} + \frac{4}{z+1}$$

$$\begin{aligned}\oint_C \left(\frac{-3}{z-5} + \frac{4}{z+1}\right) dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=5} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)\right) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z\to 5} \frac{z-23}{z+1} + \lim_{z\to -1} \frac{z-23}{z-5}\right) \\ &= 2\pi i(-3+4) \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

$\boxed{16.3.8}$ Vi veit at

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad |z| < \infty \\ \implies e^{1/z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad |z| > 0.\end{aligned}$$

Essensiell singularitet i $z = 0 \implies \oint_C e^{1/z}\, dz = 1 \cdot 2\pi i = 2\pi i$. (Koeffisienten til z^{-1} er 1.)

$\boxed{16.3.9}$ Vi har at $\sin 4z$ har nullpunkt av orden ein i $z_j := \frac{j\pi}{4}$, $j \in \mathbb{Z}$ (ettersom $\sin 4z_j = 0$ mens $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin 4z_j \neq 0$). Tre av desse nullpunkta ligg innanfor C: $-\pi/4, 0$ og $\pi/4$.

Teljaren e^{-z^2} har ikkje singularitetar eller nullpunkt, så integranden har *enkle* polar i z_j. Ved Teorem 1 s. 723 og (4) s. 721 er då

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin 4z}\, \mathrm{d}z &= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{e^{-z^2}}{\sin 4z} \\ &= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \frac{e^{-z_j^2}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin 4z_j} \\ &= 2\pi i \sum_{j=-1}^{1} \frac{e^{-(j\pi/4)^2}}{4\cos j\pi} \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-\pi^2/16}}{-4} + \frac{1}{4} + \frac{e^{-\pi^2/16}}{-4}\right) \\ &= \frac{\pi i}{2}\left(1 - 2e^{-\pi^2/16}\right).\end{aligned}$$