Øving 7

Matematikk 4K

Uke 41

12.4.

13 Ideen til slike oppgaver er å gjøre ett variabelskifte slik at PDE'en går ifra å være på en form vi ikke kan løse til en form vi kan løse. Vi kan bruke metoden i boken for å gjøre dette, som gir oss en metode for å få PDE'en på normalform. I denne oppgaven har vi at $A = 1$, $B = 5/2$ og $C = 4$. Dermed er $AC - B^2 = -9/4 > 0$ og PDE'en

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

er dermed en hyperbolsk PDE.

For å finne den normale formen må vi løse ODE'en

$$Ay'^2 - 2By' + C = y'^2 - 5y' + 4 = (y' - 1)(y' - 4) = 0.$$

Dermed er de karakteristiske løsningene $\Phi(x, y) = y - x$ og $\Psi(x, y) = y - 4x$. Om vi setter $v = y - x$ og $w = y - 4x$. Dermed har vi at $y = \frac{4v-w}{3}$ og $x = \frac{v-w}{3}$. La oss definere en ny funksjon $h(v, w) = u\left(\frac{v-w}{3}, \frac{4v-w}{3}\right)$, metoden i boken sier da at $h_{vw} = 0$. For å dobeltsjekke dette kan vi regne ut h_{vw} ved å bruke kjerneregelen i flere dimensjoner får vi

$$h_{vw}(v, w) = -u_{xx}/9 - 5u_{xy}/9 - 4u_{yy}/9 = 0.$$

Da har vi at normalformen til PDE'en er

$$h_{vw} = 0.$$

Ved å integrere med hensyn på v får vi at $h_w = f'(w)$, hvor f' er en vilkårlig funksjon. Integrerer vi igjen med hensyn på w får vi at $h(v, w) = g(v) + f(w)$. Dette medfører at løsningene er på formen

$$u(x, y) = g(y - x) + f(y - 4x).$$

12.7.

4 Setter vi $f(x) = e^{-|x|}$ inn i formelen (11) får vi at

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-\frac{(x-v)^2}{4c^2 t}}\, dv \\
&= (f * g)(x) = (g * f)(x) \\
&= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-v|} e^{-\frac{v^2}{4c^2 t}}\, dv \\
&= \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \left[\int_{x}^{\infty} e^{x-v} e^{-\frac{v^2}{4c^2 t}}\, dv + \int_{-\infty}^{x} e^{v-x} e^{-\frac{v^2}{4c^2 t}}\, dv \right].
\end{aligned}$$

Setter vi $a = 2c\sqrt{t}$ og gjør variabelskiftet $w = \frac{v}{a} + \frac{a}{2}$ på det første integralet og $w = -\frac{v}{a} + \frac{a}{2}$ på det andre integralet får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\left[e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-v}e^{-\frac{v^2}{a^2}}dv + e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{v}e^{-\frac{v^2}{a^2}}dv\right] \\
=\ & \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\left[ae^{x+a^2/4}\int_{x/a+a/2}^{\infty} e^{-w^2}dw + ae^{a^2/4-x}\int_{-x/a+a/2}^{\infty} e^{-w^2}dw\right] \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{x+c^2t}\int_{x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-w^2}dw + e^{c^2t-x}\int_{-x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-w^2}dw\right] \\
=\ & \frac{e^{c^2t}}{\sqrt{\pi}}\left[e^{x}\int_{x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-w^2}dw + e^{-x}\int_{-x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}}^{\infty} e^{-w^2}dw\right] \\
=\ & \frac{e^{c^2t}}{2}\left[e^{x}\left(1-\operatorname{erf}\left(\left|x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}\right|\right)\right) + e^{-x}\left(1-\operatorname{erf}\left(\left|x/2c\sqrt{t}-c\sqrt{t}\right|\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Dermed er løsningen på varmeligningen med f som initialdata gitt med

$$u(x,t) = \frac{e^{c^2t}}{2}\left[e^{x}\left(1-\operatorname{erf}\left(\left|x/2c\sqrt{t}+c\sqrt{t}\right|\right)\right) + e^{-x}\left(1-\operatorname{erf}\left(\left|x/2c\sqrt{t}-c\sqrt{t}\right|\right)\right)\right].$$

12.R.

18 For å løse $u_{xx} + u_x = 0$ for $u(x,y)$, begynner vi med å løse $(u_x + u)_x = 0$. Integrerer vi begge sider med hensyn på x, får vi at $u_x + u = c(y)$. Setter vi inn initialdataene, har vi at $c(y) = f(y) + g(y)$. Vi vet at løsningen på problemet $f'(x) + f(x) = C$ er $f(x) = C + De^{-x}$, dermed er løsningen $u(x,y) = f(y) + g(y) + D(y)e^{-x}$. Setter vi inn initialdataen får vi at

$$u(x,t) = f(y) + g(y) - g(y)e^{-x}.$$

13.3

6 Vi har at $Re(1/z) = Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, dermed har vi at regionen er bundet av $x < y^2 + x^2$. Omskriver vi dette får vi at $\frac{1}{4} < \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2$.

8 Tar vi kvadratet av begge sider får vi

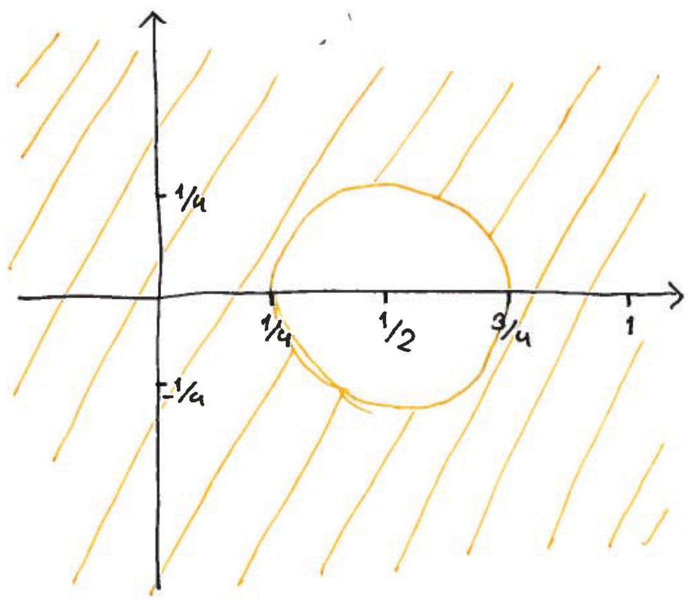
$$|z+i| \geq |z-i| \iff |z+i|^2 = x^2 + (y+1)^2 \geq |z-i|^2 = x^2 + (y-1)^2.$$

Forenkler vi ligningen får vi

$$2y \geq -2y \iff y \geq 0.$$

18 Vi har at $(z)'(i) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{z-i} = 1$ og $(c)'(i) = \lim_{z\to i}\frac{c-c}{z-c} = 0$. Dermed ved å bruke lineariteten til kompleks derivering sammen med brøk regelen får vi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z-i}{z+i}\right)'(i) &= \left.\frac{(z-i)'(z+i)-(z-i)(z+i)'}{(z+i)^2}\right|_{z=i} \\
&= \left.\frac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}\right|_{z=i} \\
&= \frac{2i}{(2i)^2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.
\end{aligned}$$



Figur 1: Bilde av domenet i oppgave 13.3.6.

23 Vi har at

$$\begin{aligned}
\left(z^3\right)'\Big|_{z=-i} &= \lim_{z\to -i} \frac{z^3-i}{z+i} = \lim_{z\to -i} \frac{z^2(z+i) - iz(z+i) - (z+i)}{z+i} \\
&= \lim_{z\to -i} z^2 - iz - 1 = -3.
\end{aligned}$$

Gjør vi den samme utregningen for $(z-i)^3$ får vi

$$\begin{aligned}
\left((z-i)^3\right)'\Big|_{z=-i} &= \lim_{z\to -i} \frac{(z-i)^3 - (-2i)^3}{z+i} = \lim_{z\to -i} \frac{z^3 - 3iz^2 - 3z + i - 8i}{z+i} \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{z^2(z+i) - 4iz^2 - 3z - 7i}{z+i} \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{z^2(z+i) - 4iz(z+i) - 7z - 7i}{z+i} \\
&= \lim_{z\to -i} \frac{z^2(z+i) - 4iz(z+i) - 7(z+i)}{z+i} \\
&= \lim_{z\to -i} z^2 - 4iz - 7 = -12.
\end{aligned}$$

Dermed har vi at den deriverte er $\frac{-3(-2i)^3-(-i)^3(-12)}{(-2i)^6} = \frac{3i}{16}$.

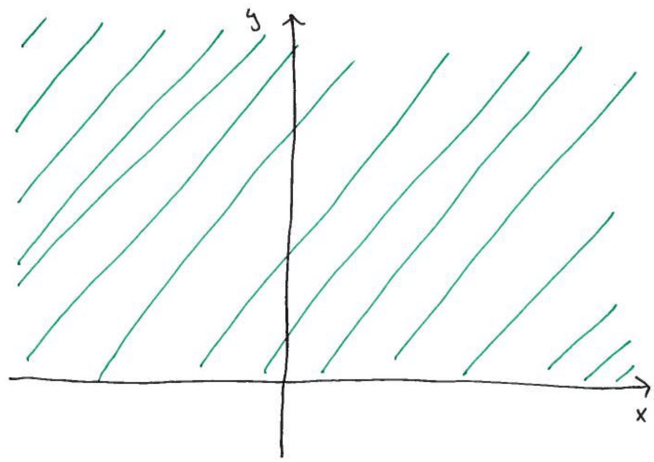
Oppgave matematikk 4K

1. Vis at

$$\widehat{f(x-a)}(w) = e^{-iwa}\hat{f}(w).$$

Vi har at

$$\widehat{f(x-a)}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\, e^{-iwx} dx.$$



Figur 2: Bilde av domenet i oppgave 13.3.8.

Gjør vi substitusjonen $x - a = y$ får vi

$$\widehat{f(x-a)}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iw(y+a)} dx = e^{-iwa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-iwy} dx = e^{-iwa} \hat{f}(w).$$