Øving 3

Matematikk 4K

Uke 37

11.1.

18. Funksjonen i oppgave 18) på intervallet $[-\pi, \pi)$ kan skrives som

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0] \\ 1 & x \in (0, \pi) \end{cases} .$$

For å finne a_0 gjør vi utrekningen

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2}.$$

Konstantene a_n finner vi ved å regne ut

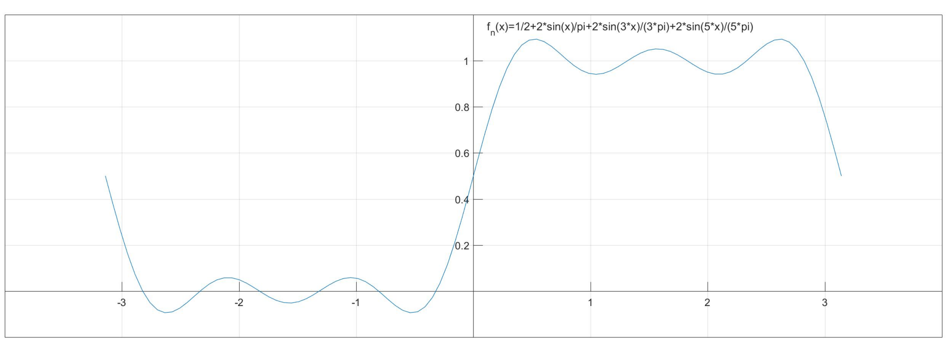
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} (\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Til sist finner vi konstantene b_n ved å regne ut

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} (\cos(0) - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{når } n \text{ er partall} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{når } n \text{ er oddetall} \end{cases} .$$

Dermed blir Fourier serien for funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{(2j+1)\pi} \sin((2j+1)x).$$



21. I denne oppgaven er funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x-\pi & x \in [-\pi, 0] \\ \pi - x & x \in (0, \pi) \end{cases} .$$

På samme måte som i forige oppgave regner vi ut a_0, a_n, b_n og får at

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [-x-\pi]\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [\pi - x]\,dx = 0,$$

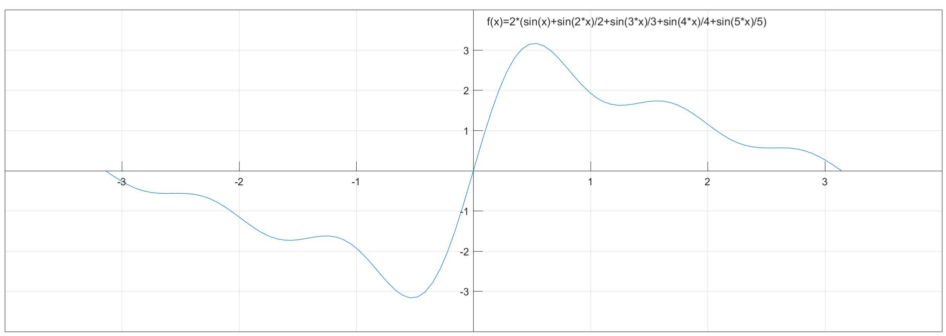
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} [-\pi - x]\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} [\pi - x]\cos(nx)\right\} dx = 0,$$

og

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} [-x-\pi]\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} [\pi - x]\sin(nx)\right\} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{n}(\cos(0) - \cos(n\pi)) - (\cos(n\pi) - \cos(0)) - \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right\} = 2/n. \end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive funksjonen som

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$



11.2.

24. a) For a finne cosinus serien regner vi ut a_0 og a_n leddene. For a_0 regner vi ut

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{2}^{4} 1dx = \frac{1}{2}.$$

Resten av a_n leddene er gitt med

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{0}^{4} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{4}\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = -\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Dermed er serien gitt med

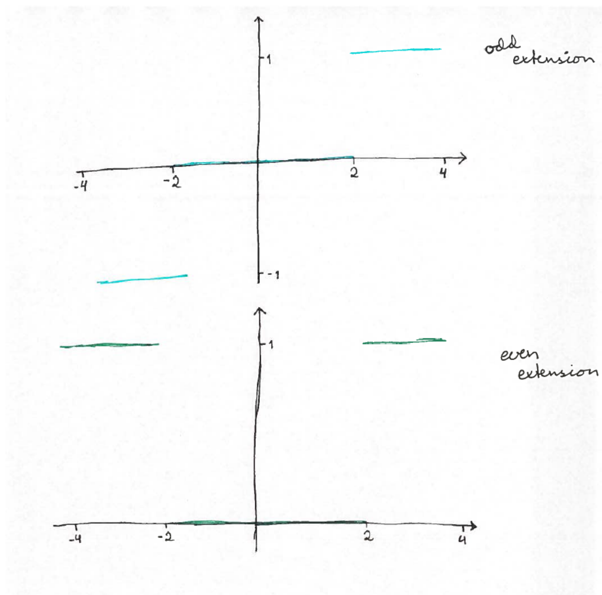
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{4}\right).$$

b) For å finne serien for sinus finner vi

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right).$$

Dermed er serien

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin(x\pi/4) - \sin(x\pi/2) + 1/3\sin(3x\pi/4) + 1/5\sin(5x\pi/4) - 1/3\sin(3x\pi/2) + \dots\right).$$



29. I denne oppgaven er vi gitt funksjonen $f(x) = \sin(x)$ i intervallet $0 < x < \pi$.

a) For å finne cosinus serien regner vi ut

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$$

og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{n\sin(x)\sin(nx) + \cos(x)\cos(nx)}{n^2-1}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{2\left((-1)^{n+1} - 1\right)}{\pi(n^2-1)}.$$

Dermed er cosinus serien

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)}\cos((2n)x).$$

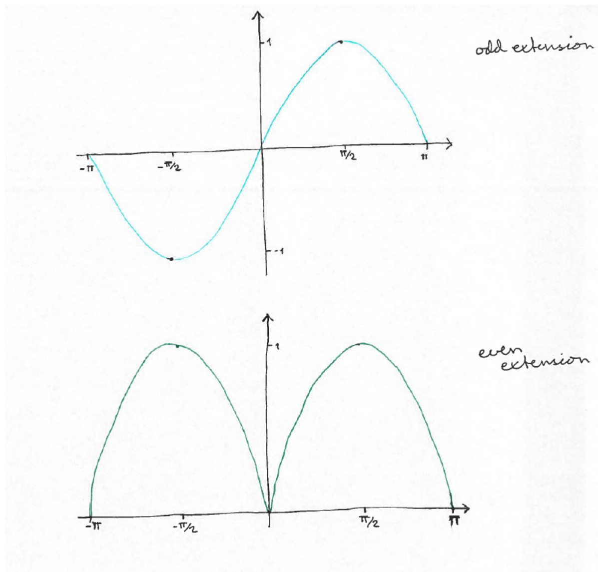
b) Intusjonen vår forteller oss at den sinus serien til $\sin(x)$ bør være $\sin(x)$. La oss sjekke at dette stemmer. Vi har at b_1 er gitt med

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Bigg|_0^\pi = 1.$$

For resten av b_n leddene har vi at

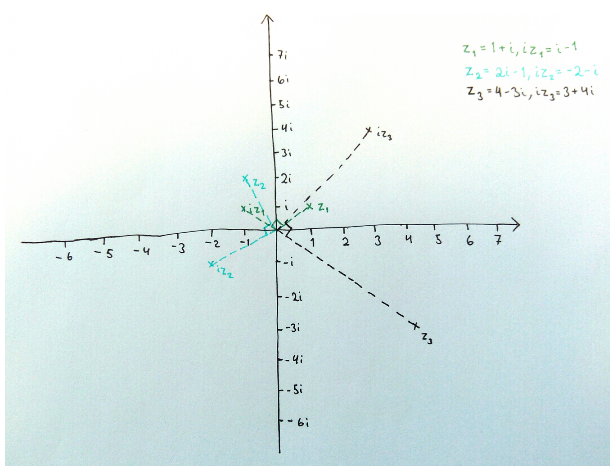
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(x)\sin(nx) - n\sin(x)\cos(nx)}{n^2-1}\right]\Bigg|_0^{\pi} = 0.$$

Dermed er sinus serien $f(x) = \sin(x)$.



13.1.

2. Gjør vi det oppgaven ber om får vi at $iz_1 = i(1+i) = i-1$, $iz_2 = i(-1+2i) = -2-i$ og $iz_3 = i(4-3i) = 3+4i$. Tegner vi dette inn i planet får vi følgende figur;



20. Vi begynner med å finne $1/\bar{z}^2$;

$$1/\bar{z}^2 = \frac{1}{(x-iy)^2} = \frac{1}{x^2-y^2-2ixy} = \frac{x^2-y^2+2ixy}{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2} = \frac{x^2-y^2+2ixy}{(x^2+y^2)^2},$$

i den tredje overgangen ganger vi over og under brøkstreken med $x^2 - y^2 + 2ixy$. Dermed har vi at

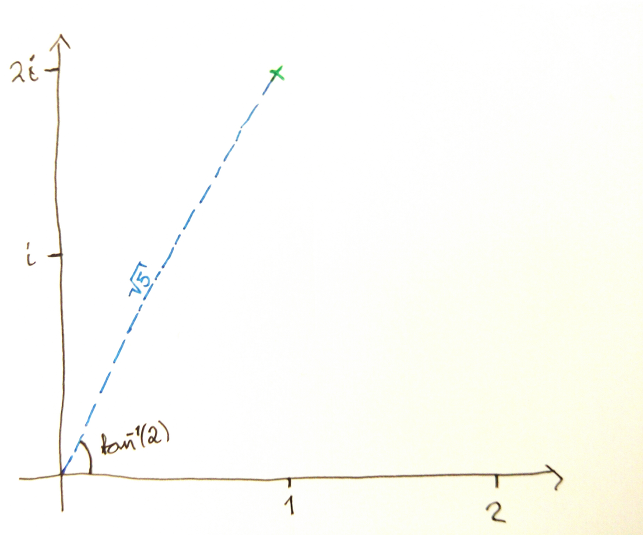
$$\Im\left(1/\bar{z}^2\right) = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

13.2.

8. Ved å gange med $3 + 2i$ over og under brøkstreken får vi

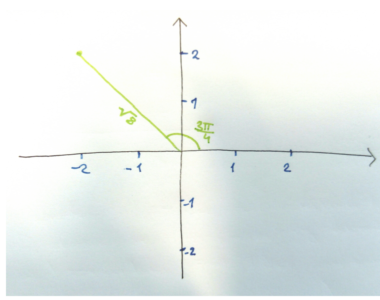
$$\frac{7+4i}{3-2i} = \frac{(7+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{13+26i}{13} = 1+2i.$$

Dermed får vi $r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, og at $\theta = \arctan(2/1) = \arctan(2) \cong 1.10714$. Skriver vi z på polarform får vi nå $z = \sqrt{5}\left(\cos(\arctan(2)) + i\sin(\arctan(2))\right)$.



17. Vi har at

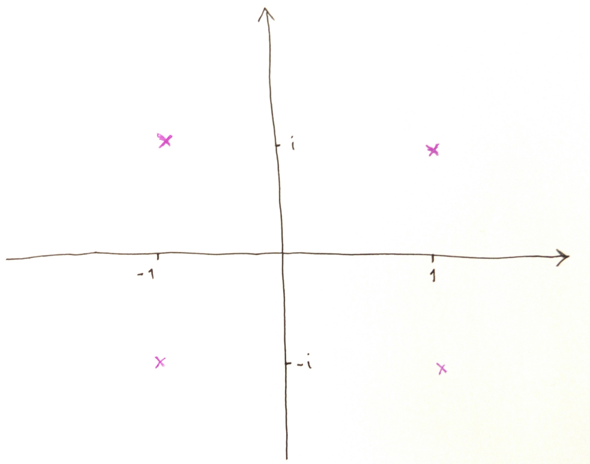
$$\sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2i.$$



24. Skriver vi -4 på polarform får vi $4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$. Bruker vi formel 15 i boken får vi

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right).$$

Setter vi inn $k = 0, 1, 2, 3$ får vi løsningene $w_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$, $w_2 = -1 - i$, $w_3 = 1 - i$ og $w_4 = i - 1$.



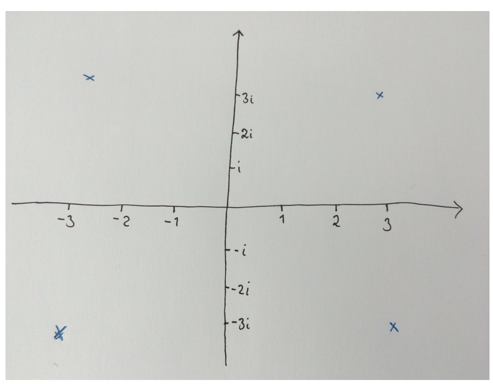
Figur 1: Fjerderøttene til -4

30. Om vi trekker fra 324 fra begge sider må vi løse ligningen $z^4 = -324 = 324(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$. Setter vi inn for fjerderoten av -324 får vi at løsningene er gitt med

$$z_k = \sqrt{18}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right).$$

Dermed er løsningene $z_0 = 3 + 3i$, $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -3 - 3i$ og $z_3 = 3 - 3i$.

Tar vi produktet mellom $z - (3 + 3i)$ og $z - (3 - 3i)$ får vi $z^2 - 6z + 18$. Tilsvarende er produktet mellom $z - (-3 - 3i)$ og $z - (-3 + 3i)$ lik $z^2 + 6z + 18$. Dermed kan vi skrive polynomet $z^4 + 324 = \left(z^2 - 6z + 18\right)\left(z^2 + 6z + 18\right)$.



Figur 2: Løsningene til polynomet i oppgave 13.2.30

35. La $z_1 = x_1 + iy_1$ og $z_2 = x_2 + iy_2$. Da har vi at

$$|z_1 + z_2|^2 = |x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

og

$$|z_1 - z_2|^2 = |x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Setter vi dette sammen får vi at

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2\right) = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Regelen heter parallelogram loven siden den sier at summen av kvadratet av lengdene til diagonalene til ett parallelogram er det dobbelte av summen til kvadratet av sidene (se tegning).