Øving 2

Matematikk 4K

Uke 36

6.4.

6. Vi er oppgit IVP'en

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

Tar vi Laplace transformasjonen på begge sider får vi

$$\left(s^2+4s+5\right)\mathscr{L}(y) - (s-5)\,y(0) - y'(0) = \left(s^2+4s+5\right)\mathscr{L}(y) - 3 = e^{-s}.$$

Løser vi for $\mathscr{L}(y)$ får vi

$$\mathscr{L}(y) = \frac{3+e^{-s}}{s^2+4s+5} = \frac{3}{(s+2)^2+1} + \frac{e^{-s}}{(s+2)^2+1}.$$

Tar vi invers Laplace transformasjon på begge sider får vi

$$y = 3e^{-2t}\sin(t) + u(t-1)\,e^{-2(t-1)}\sin(t-1).$$

11. I denne oppgaven er vi oppgitt IVP'en

$$y'' + 3y' + 2y = u(t-1) + \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Tar vi Laplace transformasjonen på begge sider får vi

$$\left(s^2+3s+2\right)\mathscr{L}(y) - (s+3)\,y(0) - y'(0) = \left(s^2+3s+2\right)\mathscr{L}(y) - 1 = e^{-s}/s + e^{-2s}.$$

Løser vi for $\mathscr{L}(y)$ får vi

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{(s+3/2)^2-1/4} + \frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{(s+3/2)^2-1/4} + \frac{e^{-2s}}{(s+3/2)^2-1/4}.$$

Vi har at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3/2)^2-1/4}\right) = 2e^{-3t/2}\sinh(t/2) = e^{-t} - e^{-2t},$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{(s+3/2)^2-1/4}\right) &= u(t-1)\int_0^{t-1} e^{-\tau} - e^{-2\tau}\,d\tau \\
&= u(t-1)\left(1 - e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^{t-1}\right) \\
&= u(t-1)\left(1/2 - e^{1-t} + \frac{1}{2}e^{2-2t}\right)
\end{aligned}$$

og

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{(s+3/2)^2-1/4}\right)=u(t-2)\left(e^{2-t}-e^{4-2t}\right).$$

Dermed er y gitt med

$$y=e^{-t}-e^{-2t}+u(t-1)\left(1/2-e^{1-t}+\frac{1}{2}e^{2-2t}\right)+u(t-2)\left(e^{2-t}-e^{4-2t}\right).$$

6.5.

3. Ved å bruke definisjonen av konvulsjon har vi at

$$\begin{aligned} e^{-t}*e^{t} &= \int_0^t e^{-\tau}e^{t-\tau}d\tau = e^t\left(-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^t\right) \\ &= e^t\left(1/2-e^{-2t}/2\right)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh(t). \end{aligned}$$

10. I oppgaven er vi gitt integralligningen

$$y(t)-\int_0^t y(\tau)\sin(2(t-\tau))\,d\tau=\sin(2t).$$

Observer at vi kan skrive om integralligningen som

$$y(t)-y(t)*\sin(2t)=\sin(2t).$$

Hvis vi tar Laplace transformasjonen får vi dermed at

$$\mathscr{L}(y)-\mathscr{L}(y)\mathscr{L}(\sin(2t))=\mathscr{L}(y)\left(1-\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{2}{s^2+4}.$$

Løser vi for $\mathscr{L}(y)$ får vi

$$\mathscr{L}(y)=\frac{2}{s^2+2}.$$

Tar vi invers Laplace transformasjonen på begge sider får vi

$$y=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right).$$

21. Vi vet at $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t$ og at $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right)=\sinh(\omega t)$. Bruker vi at Laplace av konvulsjon går til produktet av Laplace, får vi

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2(s^2-\omega^2)}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)*\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\right)=\int_0^t(t-\tau)\sinh(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{t}{\omega}\cosh(\omega t)-t/\omega-\int_0^t\tau\sinh(\omega\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\omega^2}\sinh(\omega t)-\frac{t}{\omega}. \end{aligned}$$

6.6.

14. Vi har at

$$\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2} = -\frac{1}{8}\frac{d}{ds}\left(\frac{4}{s^2+16}\right).$$

Bruker vi formel (1) på side 238 får vi at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{\left(s^2+16\right)^2}\right) = \frac{t}{8}\sin(4t).$$

19. Bemerk at

$$\frac{d}{ds}\left(\ln\left(s^2+1\right) - 2\ln(s-1)\right) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s-1} = 2\mathscr{L}\left(\cos(t) - e^t\right).$$

Hvis vi nå bruker formel (6) på side 239 får vi at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)\right) = \frac{2\left(e^t - \cos(t)\right)}{t}.$$

6.7.

9. Vi er gitt systemet av ODE'er:

$$y_1' = y_1 + y_2, \quad y_2' = -y_1 + 3y_2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Tar vi Laplace transformasjonen av begge ligningene får vi

$$sY_1 - 1 = Y_1 + Y_2, \quad sY_2 = -Y_1 + 3Y_2,$$

hvor $Y_1 = \mathscr{L}(y_1)$ og $Y_2 = \mathscr{L}(y_2)$. Løser vi det nye ligningsettet får vi at

$$Y_1 = \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-2)^2}, \quad Y_2 = \frac{-1}{(s-2)^2}.$$

Tar vi inverse Laplace transformasjonen til Y_1 og Y_2 får vi

$$y_1 = e^{2t} - e^{2t}t, \quad y_2 = -e^{2t}t.$$

6.R.

14. Vi ønsker å finne Laplace transformasjonen av

$$16t^2 u\left(t - \frac{1}{4}\right).$$

Bruker vi linearitet og s-forskyvning får vi

$$\mathscr{L}\left(16t^2 u\left(t-\frac{1}{4}\right)\right) = 16e^{-s/4}\mathscr{L}\left(\left(t+\frac{1}{4}\right)^2\right) = 32\frac{e^{-s/4}}{s^3} + 8\frac{e^{-s/4}}{s^2} + \frac{e^{-s/4}}{s}.$$

19. Bruker vi at Laplace av konvulsjon går til produkt av Laplace sammen med at $\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ og $\mathscr{L}\left(e^{-2t}\right) = \frac{1}{s+2}$ får vi at

$$\mathscr{L}\left(4t * e^{-2t}\right) = 4\mathscr{L}(t)\,\mathscr{L}\left(e^{-2t}\right) = \frac{4}{s^2(s+2)}.$$

25. Bruker vi lineariteten til inverse Laplace transformasjoner sammen med at $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$ og $\mathscr{L}^{-1}\left(2/s^3\right) = t^2$ får vi at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2\,(1-s)}{s^3}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) - 2\mathscr{L}^{-1}\left(1/s^2\right) = t^2 - 2t.$$

42. For å finne $i\,(t)$ må vi løse integroligningen

$$i'\,(t) + \int i\,(t)\,dt = 1 - e^{-t} - u\,(t-\pi)\left(1 - e^{-t}\right), \quad i\,(0) = 0, q\,(0) = 0.$$

Tar vi Laplace transformasjonen på begge sider av ligningen får vi

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)\mathscr{L}\,(i) = \frac{s^2+1}{s}\mathscr{L}\,(i) = 1/s - 1/\,(s+1) - e^{-\pi s}/s + e^{-\pi(s+1)}/\,(s+1)\,.$$

Løser vi for $\mathscr{L}\,(i)$ får vi

$$\mathscr{L}\,(i) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)\,(s+1)} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi(s+1)}s}{(s^2+1)\,(s+1)}.$$

Tar vi invers Laplace transformasjonen får vi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)\,(s+1)}\right) = e^{-t} * \cos(t) &= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\cos(\tau)\,d\tau \\ &= e^{-t}\left(\frac{e^{\tau}}{2}\left(\sin(\tau) + \cos(\tau)\right)\Big|_0^t\right) \\ &= e^{-t}\left(-1/2 + \frac{e^t}{2}\left(\sin(t) + \cos(t)\right)\right) \\ &= -e^{-t}/2 + \sin(t)/2 + \cos(t)/2.\end{aligned}$$

Dermed er

$$i\,(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t) + e^{-t} + u\,(t-\pi)\left(2\sin(t) - e^{-\pi}\sin(t) - e^{-\pi}\cos(t) - e^{-t}\right)}{2}.$$

For å finne ladningen integrerer vi $i\,(t)$ og får at

$$q\,(t) = \frac{-\cos(t) - \sin(t) - e^{-t} + u\,(t-\pi)\left(-2\cos(t) - e^{-\pi}\sin(t) + e^{-\pi}\cos(t) + e^{-t} - 2e^{-\pi}\right)}{2}.$$