Løysingsforslag for TMA4120, Øving 9

October 21, 2016

17.1.5) La $z = x + iy$ og $w = a + bi$. Biletet til $x = c$, c konstant, under mappinga $w = z^2$, er alle punkt i det komplekse planet på forma

$$\begin{aligned} w = z^2 &= (c + iy)^2 \\ &= c^2 - y^2 + 2ciy, \end{aligned}$$

det vil seie alle punkt $(a, b) = (c^2 - y^2, 2cy)$ for reelle y. Dette kan vi uttrykke ved likninga

$$a = c^2 - \left(\frac{b}{2c}\right)^2,$$

som har den same kurva som eit vanleg andregradspolynom i planet (snudd 90 grader).

For å finne biletet til $y = c$, c konstant, må vi gjere liknande utrekningar:

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + ic)^2 \\ &= x^2 - c^2 + 2cix \end{aligned}$$

Punkta som kan skrivast på denne forma i det komplekse planet er $(a, b) = (x^2 - c^2, 2cx)$, og dette kan uttrykkast ved likninga

$$a = \left(\frac{b}{2c}\right)^2 - c^2.$$

Dette er kurva over spegla om den imaginære aksen (b-aksen).

Sjå figur under for $x = 2$ og $y = 3$.

17.1.8) Igjen, la $z = x + iy$ og $w = a + bi$. $x = c$ gir

$$\begin{aligned} w &= z + 2 + i \\ &= c + yi + 2 + i \\ &= (c + 2) + (y + 1)i. \end{aligned}$$

Punkta på denne forma dannar kurva $a = c+2$. Dei vertikale linjene blir dermed flytta 2 til høgre. $y = c$ gir

$$\begin{aligned} w &= z + 2 + i \\ &= x + ci + 2 + i \\ &= (x+2) + (c+1)i. \end{aligned}$$

Punkta på denne forma dannar kurva $b = c + 1$. Horisontale linjer blir dermed flytta 1 oppover.

Sjå figur under for $x = 2$ og $y = 3$.

17.1.11) Regionen skildra i oppgåva er den delen av annulusen med indre radius 1, ytre radius 3 og sentrum i 0 som ligg i kvadranten $x > 0$, $y > 0$.

La $z = re^{i\theta}$. Då er $w = z^3 = r^3 e^{3i\theta}$, så vi kan skrive $w = se^{i\phi}$ for $1 < s < 27$ og $0 < \phi < 3\pi/2$, så biletet av mappinga ligg innanfor regionen desse likningane skildrar. Vi kan sjå at biletet faktisk er heile denne regionen, for viss $w_0 = s_0 e^{i\phi_0}$ tilfredsstiller $1 < s_0 < 27$ og $0 < \phi_0 < 3\pi/2$, så er $w_0 = (s_0^{1/3} e^{\phi_0 i/3})^3$, der $1 < s_0^{1/3} < 3$ og $0 < \phi_0/3 < \pi/2$.

Sjå figur under.

17.1.13) Vi observerer først at regionen $x \geq 1$ er unionen av alle strålar $re^{i\theta}$ der $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ er konstant og $r \geq 1/\cos\theta$. Viss $z = re^{i\theta}$ ligg på ein slik stråle, er

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta},$$

som vil seie at strålen blir sendt på linjestykket $r' e^{i\theta'}$, der $0 < r' \leq \cos\theta'$. Biletet av mappinga er dermed alle punkt $re^{i\theta}$ slik at $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ og $0 < r \leq \cos\theta$. Vi vil vise at dette er den lukka disken med sentrum i 1/2 og radius 1/2 med punktet 0 fjerna. Det er nok å vise at randa til området, alsåa alle punkt på forma $\cos\theta e^{i\theta}$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, er sirkelen med sentrum i 1/2 og radius 1/2 bortsett frå 0. Vi sjekkar at alle desse punkta ligg på sirkelen, altså at kvart slikt punkt w tilfredsstiller $|w-1/2|^2 = (1/2)^2$:

$$\begin{aligned}
\left|\cos\theta e^{i\theta} - \frac{1}{2}\right|^2 &= \left|\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{2}\right|^2 \\
&= \left|\cos^2\theta - \frac{1}{2} + i\cos\theta\sin\theta\right|^2 \\
&= \left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\theta\sin^2\theta \\
&= \cos^4\theta - \cos^2\theta + \frac{1}{4} + \cos^2\theta\sin^2\theta \\
&= \cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \cos^2\theta + \frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Vi har dermed vist det vi ville. Figur er under.

17.1.15) Teorem 1 side 737 seier at mappinga gitt ved ein analytisk funksjon f er konform overalt bortsett frå i nullpunkta til f'. Polynom er analytiske i heile det komplekse planet, så eit polynom er konformt overalt der den deriverte av polynomet ikkje er 0.

Vi har $(z^3 + 3z + 4)' = 3z^2 + 3 = 3(z+i)(z-i)$, så mappinga gitt ved $z^3 + 3z + 4$ er konform overalt bortsett frå i $z = i, -i$.

14.1.4) Alle punkt $x + iy$ på denne kurva tilfredsstiller $y = (1-x)^2$, og kurva er mengda av alle slike punkt med $-1 \le x \le 1$. Sjå figur under.

14.1.7) Når t går frå 0 til 2, går $e^{\pi i t/4}$ langs einingssirkelen frå 1 til i mot klokka. Dermed er kurva i oppgåva den delen av sirkelen med sentrum i 1 og radius 2 som ligg innanfor regionen $x \ge 1$, $y \ge 0$. Sjå figur under.

14.1.12) Her har vi to val. Vi vel å først gå i x-retning, deretter i y-retning.

Parametrisering frå $(0,0)$ til $(2,0)$:

$$z_1(t) := t, \qquad 0 \le t \le 2.$$

Parametrisering frå $(2,0)$ til $(2,1)$:

$$z_2(t) = 2 + i(t-2), \qquad 2 \le t \le 3.$$

Ei parametrisering av kurva kan då skrivast som

$$z(t) := z_1(t)\chi_{[0,2)}(t) + z_2(t)\chi_{[2,3]}(t)$$

Der funksjonen χ_I for intervall I er definert som

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & t \in I, \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

14.1.17) Dette er ein sirkel med sentrum i $-a+ib$ og radius r. Det vil seie at vi kan skrive punkta på sirkelen som $re^{i\theta}-a+ib$. Vi skal ha ei parametrisering med klokka, så vi skriv $re^{-i\theta}-a+ib$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

14.1.21) Re z er ikkje analytisk, som vi kan sjå kjapt ved å sjekke Cauchy-Riemann-likningane. Den andre metoda, derimot, fungerer. Vi treng først ei parametrisering av kurva, og vi går for $(1+i)t$, $1 \leq t \leq 5$. Det gir

$$\begin{aligned}\int_C \text{Re } z dz &= \int_1^5 \text{Re}((1+i)t)\cdot(1+i)dt \\ &= \int_1^5 t(1+i)dt \\ &= \frac{(5^2-1^2)(1+i)}{2} \\ &= 12+12i.\end{aligned}$$

14.1.23) OBS: Her tolkar vi $\pi/2i$ som $\pi/(2i)$, medan fasiten ser ut til å tolke det som $(\pi/2)i$.

e^z er analytisk i heile det komplekse planet, som er enkeltsamanhengande, så denne gongen kan vi bruke den første metoda og Teorem 1. Hugs at $(e^z)' = e^z$.

$$\begin{aligned}\int_C e^z dz &= e^{\pi i} - e^{\pi/2i} \\ &= -1 - e^{-\pi i/2} \\ &= -1+i.\end{aligned}$$

14.1.35) OBS: feil i fasit.

$$\left|\int_C \text{Re}\, z dz\right| \leq M\cdot L = 20\sqrt{2}$$

der

$$\begin{aligned}M &= \max_{z\in C} |\operatorname{Re} z| = 5, \\ L &= |(1+i)-(5+5i)| = 4\sqrt{2} \quad \text{(lengda til C)}\end{aligned}$$

sidan C er det rette linjestykket frå $(1+i)$ til $(5+5i)$.

14.2.14) Merk at $1/\overline{e^{i\pi}} = 1/e^{-i\pi} = e^{i\pi}$, så for alle z på einingssirkelen har vi $1/\bar{z} = z$. Det vil seie at å integrere f rundt einingssirkelen er det same som å integrere z, som er analytisk overalt. Dermed gjeld Cauchys integralteorem, og integralet er 0.

14.2.22)

Re(z) er ikkje ein analytisk funksjon, så Cauchys teorem kan ikkje brukast her.

Deler kurva opp i to delar, C_1: langs x-aksen og C_2: halvsirkelen

$$
\begin{aligned}
&C_1 : z(t) = t, \qquad -1 \le t \le 1, \\
&\qquad \implies \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t \\
&C_2 : z(t) = \cos t + i \sin t, \qquad 0 \le t \le \pi, \\
&\qquad \implies \quad \mathrm{d}z = (-\sin t + i \cos t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = \cos t
\end{aligned}
$$

Set inn i integralet:

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{C_1} \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{\pi} \cos t(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int\limits_{0}^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t + i\int\limits_{0}^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{i}{2}\int\limits_{0}^{\pi} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} \\
&= \underline{\frac{\pi}{2}i}
\end{aligned}
$$

14.2.27) Både $\cos z$ og z er analytiske overalt, så $\cos z/z$ er analytisk overalt bortsett frå i 0. Dermed held (6) side 658, altså

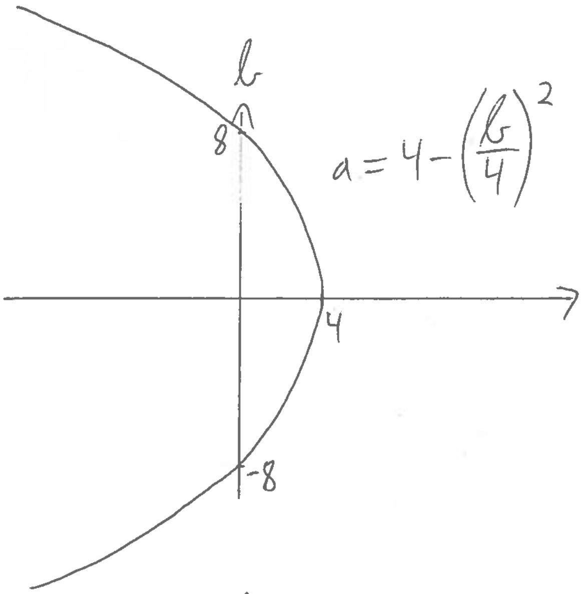
$$
\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz
$$

for f og C_1, C_2, der C_1 er $|z| = 1$ og C_2 er $|z| = 3$, begge mot klokka. Sidan den eine kurva går i motsett retning i oppgåva, får vi

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

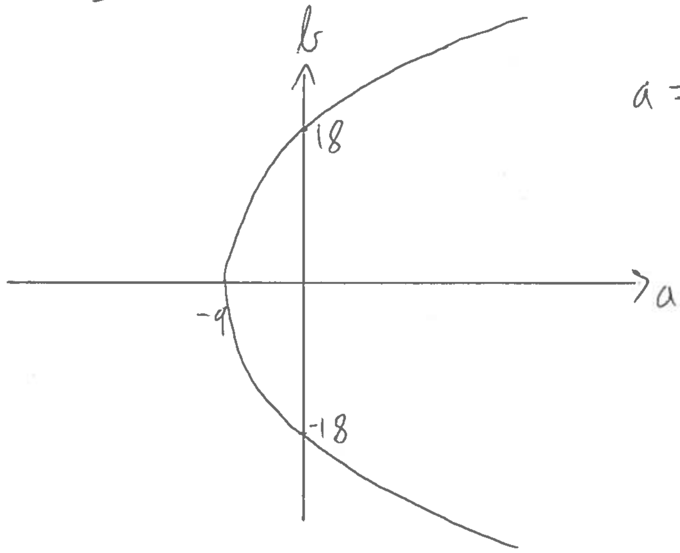
17.1.5)

$x=2$:



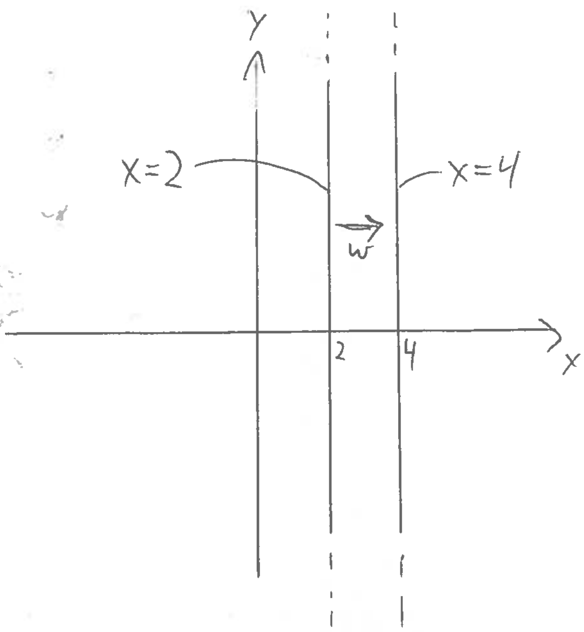
$a = 4 - \left(\frac{b}{4}\right)^2$

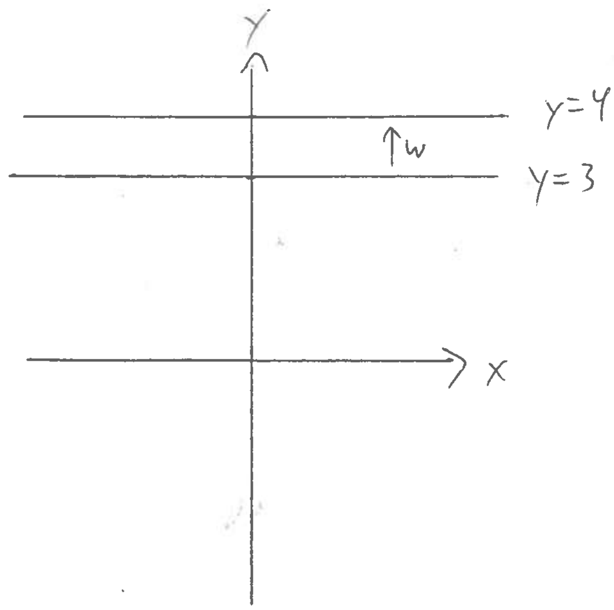
$y=3$:



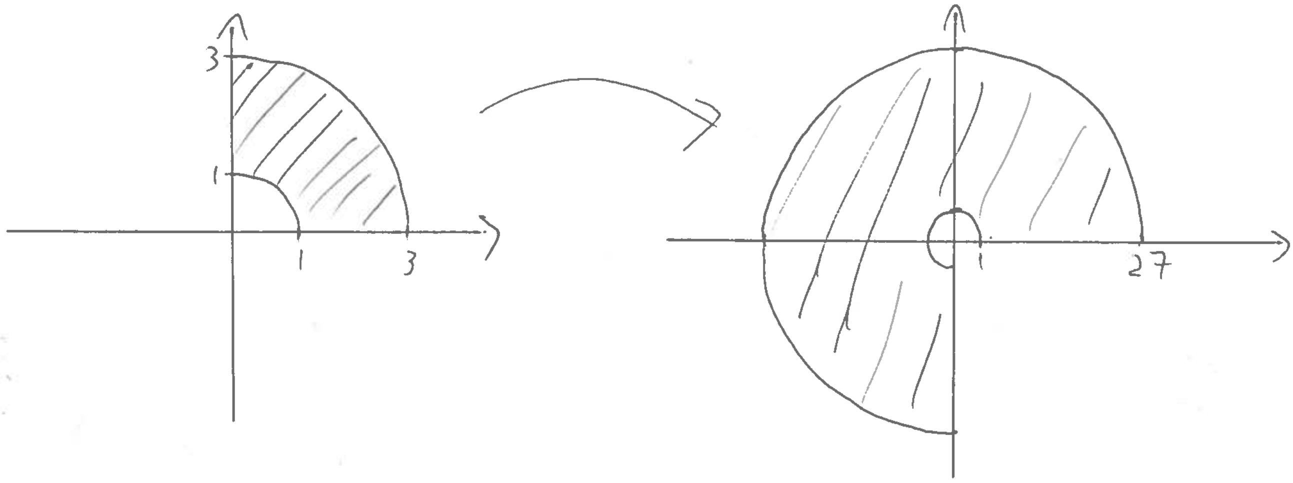
$a = \left(\frac{b}{6}\right)^2 - 9$

17.1.8)

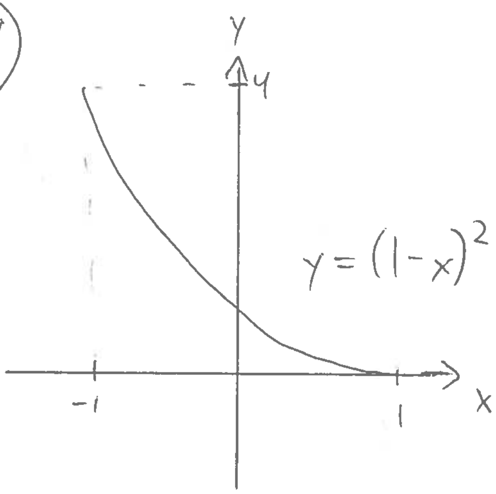




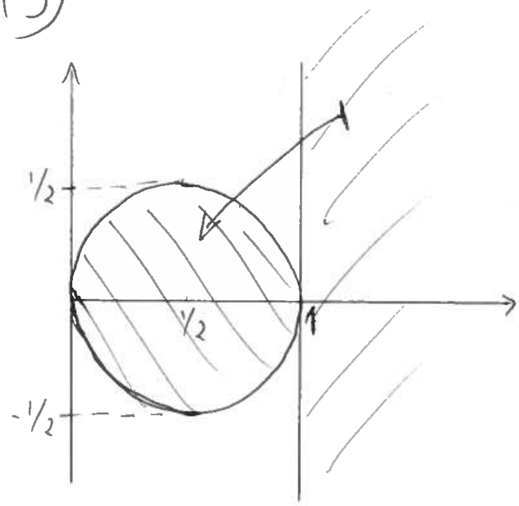
17.1.11)



14.1.4)



17.1.13)



14.1.7)