# Løysingsforslag for TMA4120, Øving 8

October 18, 2016

**13.4.3)** Vi har $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, der $u(x,y) = e^{-x}\cos y$ og $v(x,y) = -e^{-x}\sin y$, og

$$\begin{aligned} u_x &= -e^{-x}\cos y = v_y \\ v_x &= e^{-x}\sin y = -u_y. \end{aligned}$$

Dermed tilfredsstiller $f(z)$ Cauchy-Riemann-likningane. I tillegg er $u$, $v$ og alle deira deriverte kontinuerlege i $\mathbb{C}$, så $f$ er analytisk i $\mathbb{C}$.

**13.4.9)** Boka seier at vi skal bruke (1) eller (7), men det er såpass tungvint at vi vel å gjere det på ein annan måte. I Ex. 5 side 624 får vi vite at dersom $f(z)$ er eit polynom, så er $1/f(z)$ er analytisk for alle $z$ slik at $f(z) \neq 0$. (Dette held for alle analytiske funksjonar $f$.) Dermed er $3\pi/(z^3 + 4\pi^2 z)$ analytisk for alle $z$ slik at $z^3 + 4\pi^2 z \neq 0$. Sidan

$$\begin{aligned} z^3 + 4\pi^2 z &= z(z^2 + 4\pi^2) \\ &= z(z + 2\pi i)(z - 2\pi i), \end{aligned}$$

vil dette seie alle $z \neq 0, 2\pi i, -2\pi i$.

Viss vi likevel skulle ha løyst oppgåva ved hjelp av (1) eller (7), hadde det enklaste kanskje vore å først delbrøkoppspalte, så skrive kvar brøk på ei form slik at (1) eller (7) kan brukast.

**13.4.13)** Vi ser at $\nabla^2(u) = 0$, så $u$ er harmonisk. Vi har

$$\begin{aligned} u_x &= -2y \\ u_y &= -2x. \end{aligned}$$

Vi vil finne $v(x,y)$ slik at

$$\begin{aligned} v_y &= u_x = -2y \\ v_x &= -u_y = 2x. \end{aligned}$$

Om vi integrerer første likninga med omsyn til $y$, får vi $v(x,y) = -y^2 + c(x)$ for ein eller annan funksjon $c$, og vi ser at $c(x) = x^2 + C$, $C$ ein reell konstant, gjer at den andre likninga er tilfredsstilt. Dermed får vi $v(x,y) = x^2 - y^2 + C$, så

$$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2 + C) = i(z^2 + C).$$

Alle reelle val av $C$ gir altså ei løysing av oppgåva.

**13.5.5)**

$$\begin{aligned} e^{1-3\pi i} &= e \cdot e^{-3\pi i} \\ &= e \cdot (-1) \\ &= -e. \end{aligned}$$

Dermed er $|e^z| = e$.

**13.5.16)**

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= e^{\bar{z}/(z\bar{z})} \\ &= e^{(x-iy)/(x^2+y^2)} \\ &= e^{x/(x^2+y^2)} \left( \cos \frac{-y}{x^2+y^2} + i \sin \frac{-y}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

Dermed er $\mathrm{Re}(e^{1/z}) = e^{x/(x^2+y^2)} \cos \frac{-y}{x^2+y^2}$ og $\mathrm{Im}(e^{1/z}) = e^{x/(x^2+y^2)} \sin \frac{-y}{x^2+y^2}$.

**13.6.3)**

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \frac{1}{4}((e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^{z-z} + e^{-2z} - (e^{2z} - 2e^{z-z} + e^{-2z})) \quad = \frac{1}{4} \cdot 4e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 z + \sinh^2 z &= \frac{1}{4}((e^z + e^{-z})^2 + (e^z - e^{-z})^2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^{z-z} + e^{-2z} + e^{2z} - 2e^{z-z} + e^{-2z}) \\ &= \frac{1}{4}(2e^{2z} + 2e^{-2z}) \\ &= \cosh 2z \end{aligned}$$

**13.6.9)**

$$\begin{aligned} \cosh(-2+i) &= \frac{1}{2}(e^{-2+i} + e^{2-i}) \\ &= \frac{1}{2e^2}(\cos 1 + i \sin 1) + \frac{e^2}{2}(\cos(-1) + i \sin(-1)) \\ &= \left( \frac{1}{2e^2} + \frac{e^2}{2} \right) \cos 1 + \left( \frac{1}{2e^2} - \frac{e^2}{2} \right) i \sin 1 \end{aligned}$$

Vi har $\cosh iz = \cos z$ ifølge (14), så

$$\begin{aligned}\cos(-1-2i) &= \cosh(-i+2)\\ &= \cosh(i-2)\\ &= \left(\frac{1}{2e^2}+\frac{e^2}{2}\right)\cos 1 + \left(\frac{1}{2e^2}-\frac{e^2}{2}\right) i\sin 1.\end{aligned}$$

**13.6.18)** Skriv $z = x + iy$. Vi har

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\\ &= \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)))\\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y - i\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y.\end{aligned}$$

Dette skal vere lik $-1$, så følgande likningar må halde:

$$\begin{aligned}&(1) \qquad \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y = -1\\ &(2) \qquad \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y = 0.\end{aligned}$$

For at (2) skal halde, må $x = 0$, eller så må $y = n\pi$ for eit heiltal $n$. I det første tilfellet blir (1) til $\cos y = -1$, som gir $y = (2m+1)\pi$ for eit heiltal $m$. I det andre tilfellet blir (1) til

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = -1 \text{ eller}\\ &\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1\end{aligned}$$

avhengig av om $n$ er like eller odde. Den første likninga har inga løysing, sidan $e^x$ alltid er positiv. Den andre har løysinga $x = 0$. Her kan vi til dømes sjå på forteikn til den deriverte for å bli overbevist om at $e^x + e^{-x}$ har eit globalt botnpunkt i $x = 0$, så løysinga er unik.

Alt i alt er konklusjonen at løysingane er $(x, y) = (0, (2n+1)\pi)$ for $n$ heiltal.

**13.7.7)** Vi skal finne $w = x + iy = \mathrm{Ln}(8 - 8i)$. Vi har

$$\begin{aligned}e^w &= e^x(\cos y + i\sin y)\\ &= e^{\mathrm{Ln}(8-8i)}\\ &= 8 - 8i,\end{aligned}$$

som impliserer $\cos y = -\sin y$, dessutan må $\cos y > 0$. Det gir løysingane $y = \frac{-\pi}{4} + 2n\pi$, $n$ heiltal. Vi er ute etter prinsipalverdien, som ligg mellom $-\pi$

og $\pi$, så vi får $y = \frac{-\pi}{4}$. Sett inn i likninga gir det

$$\begin{aligned}
8 - 8i &= e^x(\cos y + i \sin y) \\
&= e^x \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
\implies e^x &= 8\sqrt{2} \\
\implies x &= \ln(8\sqrt{2}) \\
&= \ln(2^{7/2}) \\
&= \frac{7}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Svaret er dermed

$$\mathrm{Ln}(8 - 8i) = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i.$$

**13.7.17)**

$$\begin{aligned}
\ln(i^2) = \ln(-1) &= \ln|-1| + \pi i + 2\pi n i \\
&= \underline{\pi(1 + 2n)i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\ln(i) &= 2\left( \ln|i| + \frac{\pi}{2}i + 2\pi m i \right) \\
&= \underline{\pi(1 + 4m)i, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...}
\end{aligned}$$

**13.7.19)** Løysingane er gitt ved

$$\begin{aligned}
z &= e^{4-3i} + 2n\pi i \\
&= e^4(\cos(-3) + i \sin(-3)) + 2n\pi i \\
&= e^4(\cos 3 - i \sin 3) + 2n\pi i,
\end{aligned}$$

der $n$ er eit vilkårleg heiltal.

**13.7.23)** Prinsipalverdien er gitt ved

$$(1 + i)^{1-i} = e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)}.$$

Om vi skriv $1 + i = re^{i\theta}$, får vi $r = \sqrt{2}$ og $\theta = \pi/4$. Dermed er

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}(1 + i) &= \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}, \text{ og} \\
(1 - i)\mathrm{Ln}(1 + i) &= \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} - i\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \\
\implies (1 + i)^{1-i} &= \exp\left[ \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + i\left( \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} \right) \right] \\
&= e^{\ln\sqrt{2} + \pi/4}\left( \cos\left( \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} \right) + i \sin\left( \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

**R)** Skriv $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} i &= e^{2z} \\ &= e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) \end{aligned}$$

Her er $e^{2x}$ eit positivt reelt tal, så vi må ha $\cos 2y = 0$ og $\sin 2y > 0$. Dei einaste løysingane er $2y = \pi/2 + 2n\pi$, altså $y = \pi/4 + n\pi$, for heiltal $n$. Det gir $\sin 2y = 1$ og dermed $i = ie^{2x}$, så $x = 0$. Det vil seie at løysingane er

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) i.$$

**S)** Vi veit at $f$ er analytisk og at $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, der $u(x,y) = y^3 + Bx^2y$. Det betyr at funksjonen $u(x,y)$ oppfyller Laplaces likning $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Dermed er

$$0 = 2By + 6y = 2y(B+3)$$

og vi får $B = -3$, sidan dette skal gjelde for alle $y$.

Vidare er funksjonane $u(x,y)$ og $v(x,y)$ konjugert harmoniske og oppfyller derfor Cauchy-Riemann-likningane

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Frå dette følger det at

$$v_y = u_x = -6xy \Rightarrow v(x,y) = -3xy^2 + \eta(x)$$

der $\eta(x)$ er ein førebels vilkårleg funksjon av $x$. Om vi set dette inn i $u_y = -v_x$, får vi

$$v_x = -3y^2 + \eta'(x) = -u_y = -(3y^2 - 3x^2) = 3x^2 - 3y^2,$$

som gir $\eta'(x) = 3x^2$. Då følger $\eta(x) = x^3 + C$, der $C$ er ein konstant. Dermed er

$$v(x,y) = 3x^2 - 3xy^2 + C$$

og vi finn

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + C).$$

Frå kravet $f(0) = 0$ får vi då at $C = 0$, så $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Dermed er $f(z)$ gitt ved

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) = iz^3.$$