Løysingsforslag for TMA4120, Øving 7

October 7, 2016

12.4.13) Diskriminanten til likninga er $1 \cdot 4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4} < 0$, så likninga er av hyperbolsk type. Den karakteristiske likninga er

$$(y')^2 - 5y' + 4y = (y' - 1)(y' - 4) = 0,$$

som gir y' lik 1 eller 4, altså er $y = x + C_1$ og $y = 4x + C_2$ løysingane. Vi får dermed characteristics $\Phi(x, y) = y - x =$ konstant og $\Psi(x, y) = y - 4x =$ konstant. Tabellen side 556 gir variabelskifte $u = \Phi$ og $v = \Psi$ med $u_{vw} = 0$ som normalforma av likninga vi starta med. $u_{vw} = 0$ har løysing $u = f(v) + g(w)$, altså er

$$u(x, y) = f(y - x) + g(y - 4x)$$

løysingane vi var ute etter, der f og g er uspesifiserte funksjonar.

12.7.2) Vi skal skrive løysinga av $u_t = c^2 u_{xx}$ på integralform som i (6). Vi finn $A(p)$ og $B(p)$ ved hjelp av (8):

$$\begin{aligned}
A(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \cos pv dv \\
&= \frac{\sin pa - \sin(-pa)}{p\pi} \\
&= \frac{2 \sin pa}{p\pi} \\
B(p) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sin pv dv \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Løysinga på integralform er dermed

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{2 \sin pa}{p\pi} \cos px e^{-c^2 p^2 t} dp.$$

12.7.13) Bruker (12) og reknar:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2c\sqrt{t})}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2c\sqrt{t})}^{0} e^{-z^2}\, dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\infty) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

I steget frå første til andre linje brukte vi at $x + 2cz\sqrt{t} = 0$ når $z = -x/(2c\sqrt{t})$.

13.3.3) Mengda gitt ved likninga er ein open annulus med sentrum $1 - 2i$, indre radius lik $\pi/2$ og ytre radius lik π. Sjå figur side 619.

13.3.7) Viss vi skriv $z = x + iy$, er dette regionen til venstre for den loddrette linja $x = -1$ i xy-planet, inkludert linja sjølv.

13.3.8) Likninga held viss og berre viss absoluttverdien til imaginærdelen til $z + i$ er større enn eller lik absoluttverdien til imaginærdelen til $z - i$, sidan dei har same realdel. Med $z = x + iy$, er dette regionen gitt ved $y \geq 0$.

13.3.10) Skriv $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[f(z)] &= \mathrm{Re}[5(x+iy)^2 - 12(x+iy) + 3 + 2i] \\
&= \mathrm{Re}[5(x^2 - y^2 + 2ixy)] - 12x + 3 \\
&= 5x^2 - 5y^2 - 12x + 3 \\
\mathrm{Im}[f(z)] &= \mathrm{Im}[5(x+iy)^2 - 12(x+iy) + 3 + 2i] \\
&= \mathrm{Im}[5(x^2 - y^2 + 2ixy)] - 12y + 2 \\
&= 10xy - 12y + 2
\end{aligned}$$

Med $z = 4 - 3i$, altså $x = 4$ og $y = -3$, får vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[f(4-3i)] &= 5 \cdot 4^2 - 5 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot 4 + 3 \\
&= -10 \\
\mathrm{Im}[f(4-3i)] &= 10 \cdot 4 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3) + 2 \\
&= -82.
\end{aligned}$$

13.3.11) Skriv $z = x + iy$. Vi har

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1+\bar{z}}{(1+z)(1+\bar{z})} \\ &= \frac{1+x-iy}{(1+x)^2+y^2}, \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[f(z)] &= \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} \text{ og} \\ \mathrm{Im}[f(z)] &= -\frac{y}{(1+x)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Set inn $x = 1$ og $y = -1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[f(1-i)] &= \frac{1+1}{(1+1)^2+(-1)^2} \\ &= \frac{2}{5} \\ \mathrm{Im}[f(1-i)] &= -\frac{-1}{(1+1)^2+(-1)^2} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

13.3.14)

$$f(z) = \frac{\mathrm{Re}\, z^2}{|z|} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z \neq 0; \quad f(0) = 0$$

$$|f(z) - f(0)| = \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

For alle $\epsilon > 0$, la $\delta = \epsilon$. Det følger at

$$|z - 0| < \delta = \epsilon \implies |f(z) - f(0)| < \epsilon$$

Dvs.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0)$$

og f er kontinuerleg i $z = 0$.

13.3.21) Bruker vanlege derivasjonsreglar og får $(i(1-z)^n)' = -ni(1-z)^{n-1}$ (antatt $n \geq 1$). Altså er $(i(1-z)^n)'(0) = -ni(1-0)^{n-1} = -ni$.

13.3.23)

$$\begin{aligned}\left(\frac{z^3}{(z-i)^3}\right)' &= \frac{3z^2(z-i)^3 - 3z^3(z-i)^2}{(z-i)^6}\\ &= \frac{-3iz^2}{(z-i)^4}\\ \left(\frac{z^3}{(z-i)^3}\right)'(-i) &= \frac{-3i(-i)^2}{(-2i)^4}\\ &= \frac{3i}{16}\end{aligned}$$

Pa) Vi har

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin nx dx\\ &= \frac{2(\pi x - x^2)}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos x dx\\ &= \frac{2(\pi - 2x)}{n\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi 2\sin nx dx\\ &= \frac{4}{n^3\pi}(-\cos nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{n^3\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}.\end{aligned}$$

Dermed er $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{8}{(2k+1)^3\pi}$.
Fourier sinusrekka blir

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\sin nx} = \frac{8}{\pi}\sin x + \frac{8}{27\pi}\sin 3x + ...$$

b) Med $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir likninga $FG' = F''G - 2F'G$, og randkrava held når $F(0) = F(\pi) = 0$. Vi skriv likninga på forma

$$\frac{G'}{G} = \frac{F'' - 2F'}{F} = k.$$

Randverdiproblemet til F er

$$F'' - 2F' - kF = 0, \tag{1}$$

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{2}$$

Den karakteristiske likninga er $\lambda^2 - 2\lambda - k = 0$. Ho har to røter, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ og $\lambda_2 = 1 - \sqrt{1+k}$. Vi har tre tilfelle:

- $1 + k > 0$, då røtene er reelle og generell løysing blir $F(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$. Då gir (2) at

  $$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{og} \quad C_1e^{\lambda_1\pi} + C_2e^{\lambda_2\pi} = 0,$$

  og dermed må $C_1 = C_2 = 0$ (fordi $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Vi får $F(x) = 0$.

- $1+k=0$, då generell løysing er $F(x)=C_1+C_2x$, og vi får $C_1=0=C_1+C_2\pi$ og $F(x)=0$.
- $1+k<0$, la $1+k=-w^2$, den generelle løysinga blir $F(x)=C_1e^x\cos wx+C_2e^x\sin wx$. Då (2) gir $C_1=0=C_1e^\pi\cos w\pi+C_2e^\pi\sin w\pi$. Viss $C_2\neq 0$, må $\sin w\pi=0$ og dermed er $w\in\mathbb{Z}$.

Vi har funne at problemet har ei ikkje-triviell løysing (ei løysing ulik null) når den karakteristiske likninga $\lambda^2-2\lambda-k=0$ har to komplekse røter, $\lambda_{1,2}=1\pm ni$. Då blir $k=-1-n^2$ og $\underline{F_n=e^x\sin nx,\ n=1,2,3,....}$

c) Frå løysinga i b) veit vi at $F_n=e^x\sin nx$ og $G'-kG=0$, $k=-1-n^2$. Vi finn følgande løysing:

$$G_n=A_ne^{-(1+n^2)t}.$$

Alle løysingar på forma $u(x,y)=F(x)G(t)$ av randverdiproblemet er gitt som

$$u_n(x,t)=A_ne^x\sin nxe^{-(1+n^2)t},\ \ n=1,2,3,....$$

Ut frå superposisjonsprinsippet er

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^x\sin nxe^{-(1+n^2)t} \tag{3}$$

ein kandidat til løysing av randverdiproblemet. Vi har

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^x\sin nx.$$

Kravet $u(x,0)=e^xf(x)$ gir $A_n=b_n$ fra løysing til a). Vi får

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^x\sin nxe^{-(n^2+1)t}=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}e^x\sin nxe^{-(n^2+1)t}}.$$

Q)

(i) Vi vil finne ut om $z\text{Re}(z)$ er deriverbar i $z=1$, så vi ser på det følgande uttrykket når w går mot 0:

$$\begin{aligned}\frac{(1+w)(\text{Re}(1+w))-1\text{Re}(1)}{w}&=\frac{(1+w)(1+\text{Re}(w))-1}{w}\\&=1+\text{Re}(w)+\frac{\text{Re}(w)}{w}.\end{aligned}$$

Her går $\text{Re}(w)$ mot 0 når w går mot 0. Brøken $\text{Re}(w)/w$, derimot, er 0 viss w er imaginær og 1 viss w er reell og ulik 0. Det betyr at grenseverdien til uttrykket når $w\to 0$ er avhengig av stien w følger mot 0, så den deriverte av $z\text{Re}(z)$ finst ikkje i $z = 1$. $z\mathrm{Re}(z)$ er altså ikkje analytisk i 1.

(ii) $(z^2)' = 2z$, så z^2 er deriverbar i $\mathbb{C}$ og dermed analytisk i $z = 1$.

(iii) $(\frac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2}$, så $\frac{1}{z}$ er deriverbar i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ og dermed analytisk i $z = 1$.