Løysingsforslag for TMA4120, Øving 6

October 10, 2016

12.1.3) Set inn i likninga:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2(\cos 4t \sin 2x)}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2(\cos 4t \sin 2x)}{\partial x^2} \\
-16 \cos 4t \sin 2x &= -4c^2 \cos 4t \sin 2x.
\end{aligned}$$

u er med andre ord ei løysing av likninga med $c^2 = 4$.

12.1.9) Set inn:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\frac{\partial(e^{-\pi^2 t} \cos 25x)}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2(e^{-\pi^2 t} \cos 25x)}{\partial x^2} \\
-\pi^2 e^{-\pi^2 t} \cos 25x &= -25^2 c^2 e^{-\pi^2 t} \cos 25x.
\end{aligned}$$

u er ei løysing for $c^2 = \pi^2/25^2$.

12.1.15) Vi har at $u(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b$.

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x + 0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + 0\right) \\
&= 2a \left(\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= 2a \left(\frac{2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Altså løyser $u(x, y)$ Laplace-likninga. For $x^2 + y^2 = 1$ har vi

$$\begin{aligned}
a \ln 1 + b &= 110 \\
\implies b &= 110
\end{aligned}$$

For $x^2 + y^2 = 100$ får vi då

$$
\begin{aligned}
a \ln 100 + 110 &= 0 \\
\implies a &= \frac{-110}{\ln 100}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi

$$u(x, y) = 110 - \frac{110}{\ln 100} \ln(x^2 + y^2).$$

12.3.1) Frekvensen til fundamentalmodusen er $c/2L$, der L er lengda på strengen og $c^2 = T/\rho$, der T er spenninga og ρ er massa per lengdeeining. Frekvensen blir lågare når lengda på strengen eller massa per lengdeeining aukar. Om vi doblar spenninga, blir frekvensen ganga med $\sqrt{2}$. Ein kontrabass er strengt tatt større enn ein fiolin fordi vi har bestemt oss for å bygge dei slik, men størrelsesforholdet gjer at kontrabassen lagar lydar med lågare frekvens, altså djupare tonar.

12.3.7) Vi skal finne $u(x, t)$ for ein streng av lengde $L = 1$ med $c^2 = 1$ når initiell hastigheit er null og initielt utslag med liten k (si, 0.01) er $kx(1 - x)$.

Løysinga er gitt ved likning (12) i Kreyszig avsnitt 12.3. (Merk at sjølv om oppgåva løysast ved referering til ei likning i boka, er metoda for å kome fram til likninga, separasjon av variablar, viktig å kunne, så pass på at du meistrar den metoda.) Siden den initielle hastigheita er null, så er $B_n^* = 0$. Integralet for B_n løyser vi ved hjelp av Rottmanns formelsamling/delvis integrasjon.

$$
\begin{aligned}
B_n &= 2 \int_0^1 kx(1 - x) \sin n\pi x \, dx \\
&= 2k \left[\frac{1}{n^2\pi^2} \sin n\pi x - \frac{x}{n\pi} \cos n\pi x - \frac{2x}{n^2\pi^2} \sin n\pi x - \frac{2 - n^2\pi^2 x^2}{n^3\pi^3} \cos n\pi x \right]_0^1 \\
&= 2k \left(-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi - \frac{2 - n^2\pi^2}{n^3\pi^3} \cos n\pi + \frac{2}{n^3\pi^3} \right) \\
&= \frac{4k}{n^3\pi^3} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ like} \\ \frac{8k}{n^3\pi^3} & \text{for } n \text{ odde} \end{cases}
\end{aligned}
$$

så

$$
\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x) \\
&= \frac{8k}{\pi^3} \left(\cos \pi t \sin \pi x + \frac{1}{27} \cos 3\pi t \sin 3\pi x + \frac{1}{125} \cos 5\pi t \sin 5\pi x + ... \right)
\end{aligned}
$$

12.3.15)

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= -c^2 u_{xxxx} \\
&\Downarrow u(x,t) = F(x)G(t) \\
FG'' &= -c^2 F^{(4)} G \\
&\Downarrow F \cdot G \neq 0 \\
\frac{F^{(4)}(x)}{F(x)} &= -c^2 \frac{G''(t)}{G(t)}
\end{aligned}$$

Sidan høgresida er ein funksjon kun av x og venstresida er ein funksjon kun av t, må dei vere konstante, sei β^4.

$$(1) \qquad F^{(4)}(x) = \beta^4 F(x)$$

$$(2) \qquad G''(t) = -c^2 \beta^4 G(t)$$

Løysing av (2):
Det karakteristiske polynomet er

$$r^2 = -c^2\beta^4 \implies r = \pm ic\beta^2$$

Komplekse røter gir trigonometrisk løysing

$$G(t) = A\cos(c\beta^2 t) + B\sin(c\beta^2 t)$$

Løysing av (1):
a) Sjekk at den oppgitte funksjonen er ei løysing eller
b) Løys (1) ved å anta $F = e^{irx}$:

$$\begin{aligned}
F^{(4)} = \beta^4 F &\iff (ir)^4 F = \beta^4 F \\
&\overset{F\neq 0}{\implies} r^4 = \beta^4 \\
&\iff r^2 = \pm\beta^2 \\
&\iff r = \pm i\beta, \quad r = \pm\beta
\end{aligned}$$

Dermed er

$$e^{i\beta x}, \qquad e^{-i\beta x}, \qquad e^{\beta x}, \qquad e^{-\beta x}$$

fire uavhengige løysingar. Sidan

$$\begin{aligned}
e^{\pm i\beta x} &= \cos\beta x \pm i\sin\beta x \\
\sinh\beta x &= \frac{1}{2}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) \\
\cosh\beta x &= \frac{1}{2}(e^{\beta x} + e^{-\beta x})
\end{aligned}$$

og likninga er lineær, er også

$$\sin \beta x, \qquad \cos \beta x, \qquad \sinh \beta x, \qquad \cosh \beta x$$

4 uavhengige løysingar. Den generelle løysinga er

$$F(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x + E \cosh \beta x + F \sinh \beta x.$$

12.3.16) I 12.3.15 fann vi ut at F og G må vere på formene

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \\ G(t) &= a \cos(c\beta^2 t) + b \sin(c\beta^2 t). \end{aligned}$$

Vi ser at $\beta = 0$ gir at u er konstant, men på grunna av randkrava er $u = 0$ einaste konstante løysinga, så frå no av antek vi $\beta \neq 0$. Viss ikkje $F \equiv 0$, må $b = 0$, sidan $u_t(x, 0) = 0$ og dermed $G'(0) = 0$. Randkrava gir følgande:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A \cos \beta L + B \sin \beta L + C \cosh \beta L + D \sinh \beta L &= 0 \\ -\beta^2 A + \beta^2 C &= 0 \\ \beta^2(-A \cos \beta L - B \sin \beta L + C \cosh \beta L + D \sinh \beta L) &= 0. \end{aligned}$$

Første og tredje linje gir $A = C = 0$. Vi forenklar og får

$$\begin{aligned} B \sin \beta L + D \sinh \beta L &= 0 \\ -B \sin \beta L + D \sinh \beta L &= 0, \end{aligned}$$

som mellom anna gir $D \sinh \beta L = 0$. Vi antek $\beta \neq 0$, så då må $D = 0$. Vi har også $B \sin \beta L = 0$. Her har vi løysingar $\beta = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dermed får vi løysingar

$$\begin{aligned} u_n &= F_n(x) G_n(t) \\ &= a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{c(n\pi)^2 t}{L^2} \end{aligned}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$, der a_n er valfrie konstantar.

12.3.17) Vi skal finne løysinga av (21) som tilfredsstiller $u(x, 0) = f(x) = x(L - x)$. Vi ser etter ei løysing på forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(t),$$

der F_n og G_n er funksjonane vi fann i 12.3.16. Vi har

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Dette er Fourierrekka til $f(x)$ viss vi utvidar f til ein odde funksjon over $(-L, L)$. Vi kan dermed finne koeffisientane a_n (ver obs på at a_n her svarar til b_n når ein finn Fourierkoeffisientane i boka):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{2}{L}\left([x(L-x)(\dots)]_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L (L-2x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(L-2x)\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L 2\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right) \\
&= \frac{4L}{n^2\pi^2}\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L \\
&= \frac{4L^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n) \\
&= \begin{cases} \frac{8L^2}{n^3\pi^3}, & n \text{ odde} \\ 0, & n \text{ like.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Løysinga er dermed

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{c(n\pi)^2 t}{L^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8L^2}{(2n+1)^3\pi^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}\cos\frac{c(2n+1)^2\pi^2 t}{L^2}.
\end{aligned}$$

12.6.5)

Randkrav: $u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad$ for alle t.
Initalkrav: $u(x,0) = f(x) = \sin(0.1\pi x)$.
$f(x)$ er si eiga fourierrekke med $B_1 = 1$ og $B_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

$$\begin{aligned}
\implies u(x,t) &= \sin\left(\frac{1\cdot\pi}{10}x\right)e^{-\left(\frac{c\cdot 1\cdot\pi}{10}\right)^2 t} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)e^{-\frac{1.75\pi^2}{100}t}
\end{aligned}$$

der $c^2 = \frac{\kappa}{\rho\sigma}$ med $\kappa = 1.04$, $\rho = 10.6$ og $\sigma = 0.056$.

12.6.21)

Oppgitte krav:

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0, \qquad \text{og} \qquad u(x,a) = 25, \qquad \text{med } a = 24$$

Steady-state temperatur vil seie at temperaturen ikkje lenger endrar seg med tida: $u_t = 0$. Varmeleiingslikninga i to dimensjonar blir dermed

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \\ u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad (1) \end{aligned}$$

som er Laplaces likning. Bruker seperasjon av variablar:

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

Innsett i (1):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2} G + F \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}y^2} &= 0 \\ \frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}y^2} = k \qquad \text{(en konstant)} \end{aligned}$$

Vi har dermed to ordinære differensiallikningar:

$$F'' - kF = 0, \qquad G'' + kG = 0$$

Med $k = \mu^2 > 0$:

$$F(x) = C_1 \mathrm{e}^{\mu x} + C_2 \mathrm{e}^{-\mu x}$$

Initialkrava $u(0, y) = u(a, y) = 0$ gir $C_1 = C_2 = 0$.

Med $k = 0$:

$$F(x) = C_3 x + C_4$$

Initialkrava $u(0, y) = u(a, y) = 0$ gir $C_3 = C_4 = 0$.

Med $k = -\mu^2 < 0$:

$$F(x) = C_5 \cos(\mu x) + C_6 \sin(\mu x)$$

Initialkrava $u(0, y) = 0$ gir:

$$\begin{aligned} C_5 \cos 0 + C_6 \sin 0 &= 0 \\ C_5 &= 0 \end{aligned}$$

Initialkrava $u(a, y) = 0$ gir:

$$\begin{aligned} C_6 \sin(\mu a) &= 0 \\ \mu a &= n\pi \\ \mu &= \frac{n\pi}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{aligned}$$

$$F(x) = C_6 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Med $k = -\mu^2$ blir likninga for $G(y)$:

$$G'' - \mu^2 G = 0$$

Med løysing

$$G(y) = C_7 \mathrm{e}^{\mu y} + C_8 \mathrm{e}^{-\mu y}$$

Initialkravet $u(x, 0) = 0$ gir $C_8 = -C_7$:

$$\begin{aligned} G(y) &= C_7 \left(\mathrm{e}^{\mu y} - \mathrm{e}^{-\mu y}\right) \\ &= 2C_7 \sinh(\mu y) \\ &= 2C_7 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

For kvar einaste n får vi dermed ei løysing:

$$u_n(x, y) = C_9 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

No er framleis $n = 0, \pm 1, \pm 2$, men sidan u_n er odde mtp n (som betyr at u_{-n} er proporsjonal med u_n) held det å summere $u(x, y)$ for berre positive n. Løysinga for $n = 0$ er $u = 0$, som ikkje er særleg interessant.

Generell løysing:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Bruker siste krav $u(x, a) = 25$:

$$25 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh(n\pi)$$

$$\begin{aligned} B_n \sinh(n\pi) &= \frac{2}{a} \int_0^a 25 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \\ \frac{B_n \sinh(n\pi) a}{50} &= \left[\frac{-a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a \\ \frac{B_n \sinh(n\pi)}{50} &= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \\ B_n &= \frac{50}{n\pi \sinh(n\pi)}(1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

som gir løysinga

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n\pi \sinh(n\pi)}(1 - (-1)^n) \sinh\left(\frac{n\pi y}{24}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{24}\right)$$

N)

$$\begin{aligned}|e^{2z_0+3i}| &= |e^{2z_0}e^{3i}|\\ &= |\,(e^{z_0})^2\,||e^{3i}|\\ &= |e^{z_0}|^2\cdot 1\\ &= 25\end{aligned}$$

Oa) Ved innsetting ser vi at

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 \pm u_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 \pm u_2) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) \pm \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0,$$

og

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)(0,t) &= 2a, &\qquad (u_1-u_2)(0,t) &= 0,\\ (u_1+u_2)(1,t) &= 2b, &\qquad (u_1-u_2)(1,t) &= 0.\end{aligned}$$

Altså løyser $u_1 + u_2$ randverdiproblemet

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ for } t > 0, \ x \in (0,1),\\ u(0,t) = 2a \text{ for } t > 0,\\ u(1,t) = 2b \text{ for } t > 0\end{cases}$$

og $u_1 - u_2$ løyser (**). Superposisjonsprinsippet held for (*) dersom $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ også løyser (*) for alle reelle tal A og B:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au_1 + Bu_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Au_1 + Bu_2) = A\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = 0,$$

og

$$(Au_1 + Bu_2)(0,t) = (A+B)a \text{ og } (Au_1 + Bu_2)(1,t) = (A+B)b,$$

dvs. $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ løyser (*) berre når $a = b = 0$. Dermed held superposisjonsprinsippet ikkje for (*) når a eller b er ulik null. Men det held for (**) sidan (**) svarar til (*) med $a = b = 0$.

b) Legg merke til at $v_t = u_t$, $v_{xx} = u_{xx}$, $v(0,t) = u(0,t) - a$ og $v(1,t) = u(1,t) - b$. Sidan u oppfyller (*), ser vi at v må oppfylle (**).

Randverdiproblemet (**) er løyst i Kreyszig side 559-560, sjå der for detaljar i utrekninga. Innsetting av $v(x,y) = F(x)G(t)$ i (**) gir

$$\begin{aligned}G'(t) &= kG(t) \text{ for } t > 0,\\ F''(x) &= kF(x) \text{ for } 0 < x < 1,\\ F(0) = F(1) &= 0,\end{aligned}$$

der k er ein konstant. Likningane for F har berre løysing ulik 0 når $k = -n^2\pi$ for $n \in \mathbb{N}$, og då er

$$F_n(x) = K_n \sin n\pi x \text{ og } G_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

for vilkårlege konstantar K_n, C_n. Alle løysingar på forma $v(x, y) = F(x)G(t)$ er då gitt ved

$$v_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x,$$

der $n \in \mathbb{N}$, og $A_n = K_n C_n$ er ein vilkårleg konstant.

c) Hugs at $a = -1$ og $b = 1$, slik at $u(x, t) = v(x, t) - [-1 + 2x]$. Vi ser då at v løyser randverdiproblemet (**) med initialkrav

$$v(x, 0) = u(x, 0) + [-1 + 2x] = \sin \pi x + [-1 + 2x]. \tag{1}$$

Frå b) og superposisjon har vi følgande kandidat til løysing av (**) og (1):

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Ved å sette $t = 0$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = v(x, 0) = \sin \pi x + [-1 + 2x]. \tag{2}$$

No finn vi Fourier-sin-rekka til $-1 + 2x$ for $0 \leq x \leq 1$:

$$-1 + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \text{ for } 0 < x < 1 \text{ og } b_n = 2\int_0^1 (-1 + 2x) \sin n\pi x dx.$$

Delvis integrasjon gir at $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^n)$ for $n \in \mathbb{N}$, og frå (2) ser vi dermed at vi må velje

$$A_1 = b_1 + 1 \text{ og } A_n = b_n \text{ for } n > 1.$$

Dvs. løysinga av (**) og (1) er

$$v(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} e^{-4m^2\pi^2 t} \sin 2m\pi x.$$

Her har vi brukt at $b_n = 0$ for odde n og $b_n = 4/n\pi$ for $n(= 2m)$ like. Løysinga u av (*) og (***) er då

$$u(x, t) = v(x, t) - [-1 + 2x].$$