Løysingsforslag for TMA4120, øving 2

September 12, 2016

6.4.5) La $Y(s) = \mathscr{L}(y(t))$. Tek Laplacetransform og får

$$\begin{aligned}
s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4Y &= s^2Y - 1 + 4Y = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \\
Y &= \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} + 1}{s^2 + 4} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} + 1\right)\frac{2}{s^2 + 4} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} + 1\right)\mathscr{L}(\sin(2t)) \\
\implies y(t) &= \frac{1}{2}(\sin(2(t-\pi))u(t-\pi) - \sin(2(t-2\pi))u(t-2\pi) + \sin(2t)) \\
&= \frac{1}{2}(1 + u(t-\pi) - u(t-2\pi))\sin(2t)
\end{aligned}$$

6.4.14a) La $f(t)$ vere periodisk med periode p, altså $f(t) = f(t+p)$ for alle t.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p e^{-s(t+np)} f(t+np)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p e^{-nps} e^{-st} f(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nps} \int_0^p e^{-st} f(t)dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ps}\right)^n \int_0^p e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt
\end{aligned}
$$

6.4.14b) Her er $f(t) = \sin(\omega t)$ for $0 \leq t \leq \pi/\omega$ og $f(t) = 0$ for $\pi/\omega \leq t \leq 2\pi/\omega$, og f er periodisk med periode $p = 2\pi/\omega$. Bruker 14a) og får

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin(\omega t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin(\omega t)dt &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin(\omega t)\Big|_0^{\pi/\omega} + \frac{\omega}{s} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \cos(\omega t)dt \\
&= \frac{\omega}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cos(\omega t)\Big|_0^{\pi/\omega} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin(\omega t)dt \right)
\end{aligned}
$$

$$
\implies \left(1 + \left(\frac{\omega}{s}\right)^2\right) \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin(\omega t)dt = \frac{\omega}{s^2}(e^{-\pi s/\omega} + 1)
$$

$$
\implies \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin(\omega t)dt = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(e^{-\pi s/\omega} + 1)
$$

Vi slår saman det vi har funne:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(e^{-\pi s/\omega}+1) \\
&= \frac{\omega(e^{-\pi s/\omega}+1)}{(1-e^{-\pi s/\omega})(1+e^{-\pi s/\omega})(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{\omega}{(1-e^{-\pi s/\omega})(s^2+\omega^2)}.
\end{aligned}$$

Ein annan framgangsmåte er å skrive $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$. Ein får dermed eit enklare integral å rekne ut, og slepp å gjere delvis integrasjon to gongar.

6.4.14c) La f vere funksjonen i Fig. 137, og g funksjonen i Fig. 138. Vi har $g(t) = f(t) + u(t-\pi/\omega)f(t-\pi/\omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(g(t)) &= \mathscr{L}(f(t)) + \mathscr{L}(u(t-\pi/\omega)f(t-\pi/\omega) \\
&= \mathscr{L}(f(t)) + e^{-\pi s/\omega}\mathscr{L}(f(t)) \\
&= \frac{\omega(1+e^{-\pi s/\omega})}{(1-e^{-\pi s/\omega})(s^2+\omega^2)} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\frac{\pi s}{2\omega}
\end{aligned}$$

6.5.7)

$$\begin{aligned}
t * e^{-t} &= \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}d\tau \\
&= \tau e^{\tau - t}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau-t}d\tau \\
&= t - \left(e^0 - e^{-t}\right) \\
&= e^{-t} + t - 1
\end{aligned}$$

6.5.13) Løys integrallikninga med Laplacetransformasjon.

$$y(t) + 2e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau = te^t.$$

$$
\begin{aligned}
te^t &= y(t) + 2e^t \int_0^t y(\tau)e^{-\tau}d\tau \\
&= y(t) + 2\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau \\
&= y + 2y * e^{-t} \\
\implies \frac{1}{(s-1)^2} &= Y + 2Y\frac{1}{s-1} = \frac{s+1}{s-1}Y \\
\implies Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} \\
&= \frac{1}{s^2-1},
\end{aligned}
$$

med løysing

$$y(t) = \sinh t.$$

6.5.19) Finn $f(t)$ når

$$\mathscr{L}(f) = \frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}.$$

Skriv

$$\mathscr{L}(f) = 2\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\frac{s}{s^2+\pi^2} = 2\mathscr{L}(\sin \pi t)\mathscr{L}(\cos \pi t).$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2\sin \pi t * \cos \pi t \\
&= 2\int_0^t \sin(\pi\tau)\cos(\pi(t-\tau))d\tau.
\end{aligned}
$$

Ved dei trigonometriske summeformlane og halvvinkelidentitetane finn vi at

$$
\begin{aligned}
2\sin \pi\tau \cos(\pi t - \pi\tau) &= 2\sin \pi\tau(\cos \pi t \cos \pi\tau + 2\sin \pi t \sin \pi\tau) \\
&= 2\cos \pi t \sin \pi\tau \cos \pi\tau + 2\sin \pi t \sin^2 \pi\tau \\
&= \cos \pi t \sin 2\pi\tau + \sin \pi t(1 - \cos 2\pi\tau) \\
&= \sin \pi t + \sin 2\pi\tau \cos \pi t - \cos 2\pi\tau \sin \pi t \\
&= \sin \pi t + \sin(2\pi\tau - \pi t).
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \sin \pi t + \sin(2\pi\tau - \pi t)d\tau && (1) \\
&= \sin \pi t\Big|_0^t \tau - \frac{1}{2\pi}\Big|_0^t \cos(2\pi\tau - \pi t) && (2) \\
&= t\sin \pi t - \frac{1}{2\pi}(\cos \pi t - \cos(-\pi t)) && (3) \\
&= t\sin \pi t. && (4)
\end{aligned}
$$

Alternativt kan ein bruke

$$\frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2} = \left(\frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}\right)',$$

smugtitte på delkapittel 6.6, og bruke formelen for den deriverte av Laplace-transformen.

6.5.16e) Vi Laplacetransformerer likninga:

$$\begin{aligned} s^2Y - sK_1 - K_2 + \omega^2 Y &= R \\ (s^2+\omega^2)Y &= R + sK_1 + K_2. \end{aligned}$$

Sidan Laplacetransformen er unik (under visse føresetnadar), er denne likninga ekvivalent med den vi starta med. Vi gjer det same med den andre likninga i oppgåva:

$$Y = \frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}R + K_1\frac{s}{s^2+\omega^2} + K_2\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

og etter kansellering endar vi opp med det same som i stad:

$$(s^2+\omega^2)Y = R + sK_1 + K_2.$$

Likningane i oppgåva er dermed ekvivalente med den same likninga, så dei er ekvivalente.

6.6.16) Denne oppgåva kan nok løysast meir elegant ved hjelp av likning (6) frå side 239 i læreboka. Løysinga under baserer seg på likning (1) frå side 238. Det kan vere lurt å ha prøvd begge metodene.

Viss vi lèt $G(s) = s^2 + 6s + 10$, ser vi at tellaren i $F(s)$ er $G'(s) = 2s + 6$ og nemnaren er $(G(s))^2$. Det er derfor klart at F er den deriverte til ein funksjon H på forma

$$H(s) = -\frac{1}{G(s)} = -\frac{1}{s^2+6s+10} = -\frac{1}{(s+3)^2+1}.$$

Sidan $F = H'$, gir likning (1) på side 238 at

$$f(t) = \mathscr{L}(F)(t) = \mathscr{L}(H')(t) = -th(t),$$

der

$$h(t) = \mathscr{L}(H)(t) = -e^{-3t}\sin t$$

ifølge s-skiftteoremet. Derfor er

$$f(t) = te^{-3t}\sin t.$$

6.6.17) Finn f viss

$$\mathscr{L}(f) = \ln\frac{s}{s-1}.$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(tf(t)) &= -F'(s) \\
&= -\frac{d}{ds}\ln\frac{s}{s-1} \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.
\end{aligned}
$$

Dermed er $tf(t) = e^t - 1$. Dvs.

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

6.7.13) Laplacetransformerer likningane.

$$
\begin{aligned}
s^2Y_1 - sy_1(0) - y_1'(0) + Y_2 &= -101\frac{10}{s^2+100} \\
\implies s^2Y_1 - 6 + Y_2 &= -\frac{1010}{s^2+100} \\
s^2Y_2 - sy_2(0) - y_2'(0) + Y_1 &= 101\frac{10}{s^2+100} \\
\implies s^2Y_2 - 8s + 6 + Y_1 &= \frac{1010}{s^2+100}
\end{aligned}
$$

Legg saman likningane og får

$$
\begin{aligned}
(s^2+1)Y_1 + (s^2+1)Y_2 - 8s = 0 \\
\implies Y_2 = -Y_1 + \frac{8s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Puttar dette inn i den første likninga:

$$
\begin{aligned}
s^2Y_1 - 6 - Y_1 + \frac{8s}{s^2+1} &= -\frac{1010}{s^2+100} \\
Y_1 &= \frac{1}{s^2-1}\left(6 - \frac{8s}{s^2+1} - \frac{1010}{s^2+100}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\left(6 - 8\frac{s}{s^2+1} - 101\frac{10}{s^2+100}\right) \\
&= -\frac{4}{s-1} + \frac{4s}{s^2+1} + \frac{10}{s^2+100}
\end{aligned}
$$

ved delbrøkoppspalting. Dette gir

$$y_1(t) = -4e^t + 4\cos(t) + \sin(10t).$$

Vi veit at $Y_2 = -Y_1 + \frac{8s}{s^2+1}$, så vi får

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= -y_1(t) + 8\cos(t) \\
&= 4e^t + 4\cos(t) - \sin(10t).
\end{aligned}
$$

6.R.39) Tek Laplacetransform av likningane i 38).

$$
\begin{aligned}
m_1(s^2Y_1 - sy_1(0) - y_1'(0)) &= -k_1Y_1 + k_2(Y_2 - Y_1) \\
\implies 10(s^2Y_1 - 1) &= -20Y_1 + 40(Y_2 - Y_1) \\
\implies (10s^2 + 60)Y_1 - 40Y_2 &= 10 \\
m_2(s^2Y_2 - sy_2(0) - y_2'(0)) &= -k_2(Y_2 - Y_1) - k_3Y_2 \\
\implies 10(s^2Y_2 + 1) &= -40(Y_2 - Y_1) - 20Y_2 \\
\implies -40Y_1 + (10s^2 + 60)Y_2 &= -10
\end{aligned}
$$

Legg saman første og andre likning.

$$
\begin{aligned}
(10s^2 + 20)Y_1 - (10s^2 + 20)Y_2 &= 0 \\
\implies Y_1 &= -Y_2
\end{aligned}
$$

Puttar inn i den første likninga og får

$$
\begin{aligned}
(10s^2 + 60)Y_1 + 40Y_1 &= 10 \\
\implies Y_1 &= \frac{1}{s^2 + 10}.
\end{aligned}
$$

Dermed er svaret

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \sin(\sqrt{10}t) \\
y_2 &= -\frac{1}{\sqrt{10}} \sin(\sqrt{10}t).
\end{aligned}
$$

B) Tek Laplacetransformen av likninga og får

$$
\begin{aligned}
(s^2Y - y'(0) - sy(0)) + 4(sY - y(0)) + 4Y &= \mathscr{L}(2e^{-2t} + \delta(t-1)) \\
\implies (s^2 + 4s + 4)Y = (s+2)^2Y &= 2\frac{1}{s+2} + e^{-s}.
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
Y = 2\frac{1}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+2)^2}e^{-s}.
$$

Tek den inverse transformen:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(2\frac{1}{(s+2)^3}\right) &= e^{-2t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = e^{-2t}t^2, \\
\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}e^{-s}\right) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)\Big|_{t=t-1} u(t-1) \\
&= \left[e^{-2t}t\right]_{t=t-1} u(t-1) = e^{-2(t-1)}(t-1)u(t-1),
\end{aligned}
$$

som gir

$$
y(t) = t^2e^{-2t} + (t-1)e^{-2(t-1)}u(t-1).
$$

C) Tek Laplacetransformen av likninga:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(y') + Y + \mathscr{L}(y * e^t) &= \mathscr{L}(u(t-1)) \\
sY - y(0) + Y + Y\mathscr{L}(e^t) &= \frac{e^{-s}}{s} \\
Y &= \left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)\left(s + 1 + \frac{1}{s-1}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)\left(\frac{s(s-1) + (s-1) + 1}{s-1}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{e^{-s}}{s}\right)\frac{s-1}{s^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^3} \\
\implies y(t) &= 1 - t + u(t-1)\left(t - 1 - \frac{1}{2}(t-1)^2\right) \\
&= 1 - t + u(t-1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}
$$