Løysingsforslag for TMA4120, Øving 12

November 21, 2016

16.1.3) Vi veit at $\cosh z$ er gitt ved rekka

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

som konvergerer i heile $\mathbb{C}$. Dermed konvergerer

$$\cosh \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{(2n)!},$$

i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Det gir laurentrekka

$$z^3 \cosh \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n+3}}{(2n)!},$$

for $|z| > 0$.

16.1.7) Bruker trigonometriske identitetar:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin\left(\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Det gir oss laurentrekka

$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{(z-\pi/4)^3} &= \frac{\sqrt{2}}{2(z-\pi/4)^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\pi/4)^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(z-\pi/4)^{n-3}}{n!},
\end{aligned}$$

der $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ for like n, og $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ for odde n. Rekka konvergerer for $|z - \pi/4| > 0$.

16.1.13) Kjenner rekka

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1$$

så

$$\begin{aligned}\frac{z^8}{1-z^4} &= z^8 \sum_{n=0}^{\infty} (z^4)^n \\ &= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+8} = z^8 + z^{12} + z^{16} + ...}\end{aligned}$$

Dette er ei taylorrekke (inneheld ikkje negative potensar av z) som konvergerer i området

$$\underline{|z| < 1} \qquad (R = 1).$$

Kan også finne ei laurentrekke ved litt triksing:

$$\begin{aligned}\frac{z^8}{1-z^4} &= \frac{z^4}{z^{-4}-1} \\ &= -z^4 \frac{1}{1-z^{-4}} \\ &= -z^4 \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-4})^n \\ &= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} -z^{4-4n} = -z^4 - 1 - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} - ...}\end{aligned}$$

Rekka til $1/(1-z^{-4})$ divergerer for $|z^{-4}| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |z| \leq 1$, så konvergensområdet til rekka blir

$$\underline{|z| > 1}.$$

16.2.3)

Nullpunkt

$f(z) = \tan^2 2z$ er 0 nøyaktig der $\sin 2z$ er 0, altså for $2z = n\pi \Leftrightarrow z = n\pi/2$ for heiltal n. Sidan $\tan^2 2z = \sin^2 2z / \cos^2 2z$ og $\cos^2 2z \neq 0$ der $\sin^2 2z = 0$, har nullpunkta til $\sin^2 2z$ same orden som nullpunkta til $\tan^2 2z$.

Deriverer for å finne ordenane:

$$\begin{aligned}(\sin^2 2z)' &= 2\sin 2z \cdot 2\cos 2z \\ &= 4\sin 2z \cos 2z, \\ (\sin^2 2z)'' &= 8(\cos^2 2z - \sin^2 2z) \\ &= 8(1 - 2\sin^2 2z)\end{aligned}$$

Vi ser at $z = n\pi/2 \implies f'(z) = 0$, men $z = n\pi/2 \implies f''(z) = 8(1-0) \neq 0$. Det vil seie at alle nullpunkta til f har orden 2.

Polar

Polane til f er i punkta der $\cos 2z$ er 0, altså punkta $z = n\pi/2 + \pi/4$ for heiltal n. Teorem 4 seier at f har ein pol av orden n i eit punkt viss $1/f$ har eit nullpunkt av orden n i same punkt. Ved same type argument som over er det å finne ordenen til nullpunkta til $1/f$ det same som å finne ordenen til nullpunkta til $\cos^2 2z$. Men $\cos^2 2z = \sin^2(2z + \pi/2) = \sin^2 2(z + \pi/4)$, og vi har allereie funne ut at alle nullpunkta til $\sin^2 2z$ og dermed til $\sin^2 2(z + \pi/4)$ har orden 2. Sidan alle polane til f svarer til slike nullpunkt, har også dei orden 2.

16.2.5) Taylorrekka til ein funksjon f av orden n i $z = z_0$ er på forma

$$f(z) = (z - z_0)^n[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots] \quad (a_n \neq 0)$$

(sjå (3) side 717). Taylorrekka til f^2 i z_0 er dermed

$$f^2(z) = (z - z_0)^{2n}[a_n^2 + b_{n+1}(z - z_0) + b_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots],$$

der koeffisientane b_i er gitt av koeffisientane til rekka for f. Då får vi at dei $2n - 1$ første deriverte av f^2 er lik 0 i z_0, medan den $2n$-tederiverte er ulik 0, så f^2 har orden $2n$.

16.2.6a) Dette følger direkte av definisjonen av orden: dersom f har eit nullpunkt av orden $n > 1$ i $z = z_0$, er $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ 0 i z_0, men ikkje $f^{(n)}$. Det vil seie at $(f')', (f')'', \dots, (f')^{(n-2)}$, men ikkje $(f')^{(n-1)}$, er 0 i z_0, så f' har eit nullpunkt av orden $n - 1$ i z_0. (Ein må berre passe på at f' faktisk er 0 i z_0, som stemmer fordi nullpunktet til f i z_0 har orden strengt større enn 1).

16.2.7)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z + 2i)^2} - \frac{z}{z - i} + \frac{z + 1}{(z - i)^2} \\ &= \frac{1}{(z + 2i)^2} + \frac{-z(z - i) + z + 1}{(z - i)^2} \\ &= \frac{(z - i)^2 + (z + 2i)^2(-z^2 + zi + z + 1)}{(z + 2i)^2(z - i)^2} \end{aligned}$$

Uttrykket i nemnaren er lik null for $z = -2i$ og $z = i$. For $z = -2i$ er uttrykket i tellaren lik -9, medan for $z = i$ er uttrykket lik $-9 - 9i$, altså $\neq 0$ i begge tilfella. Dermed har funksjonen $f(z)$ ein singularitet av andre orden i $z = -2i$ og ein singularitet av andre orden i $z = i$.

For å finne ut om f har ein singularitet i ∞, let vi $w = 1/z$ og $g(w) := f(1/w) = f(z)$ og studerer $g(w)$ for w nær 0.

$$\begin{aligned} g(w) = f(1/w) &= \frac{1}{(1/w + 2i)^2} - \frac{1/w}{1/w - i} + \frac{1/w + 1}{(1/w - i)^2} \\ &= \frac{w^2}{(1 + 2iw)^2} - \frac{1}{1 - iw} + \frac{w + w^2}{(1 - iw)^2} \end{aligned}$$

Dette er brøkar av polynom der ingen av nemnarane har nullpunkt i 0, så g er analytisk i 0, og f har dermed ingen singularitet i ∞.

16.3.1)

Funksjonen

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^6}$$

har ein pol i $z = 0$ av 5. orden (ikkje 6. orden på grunn av felles nullpunkt i $z = 0$ for teller og nemnar). Finn residyen ved å sjå på laurentrekka:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} z^{2n-5}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{z^5} - \frac{2^3}{3! z^3} + \frac{2^5}{5! z} - \ldots \end{aligned}$$

Finn dermed at

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = b_1 = \frac{2^5}{5!} = \underline{\frac{4}{15}}.$$

16.3.6)

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5}\,\mathrm{d}z, \qquad C: |z-2-i| = 3.2 \\ &= \oint_C \frac{z-23}{(z-5)(z+1)}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Integranden har singularitetar i $z = 5$ og $z = -1$ av første orden. Vi har

$$|5-2-i|^2 = |3|^2 + |i|^2 = 10 < 3.2^2$$

og

$$|-1-2-i|^2 = |-3|^2 + |i|^2 = 10 < 3.2^2,$$

så begge singularitetane ligg innanfor kurva C.

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z-23}{(z-5)(z+1)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=5} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \right) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z\to 5} \frac{z-23}{z+1} + \lim_{z\to -1} \frac{z-23}{z-5} \right) \\ &= 2\pi i(-3+4) \\ &= \underline{2\pi i} \end{aligned}$$

16.3.9)

$$\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)} dz, \qquad C: |z| = 1.5$$

e^{-z^2} er analytisk i $\mathbb{C}$.

$$\sin(4z) = 0 \iff 4z = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \iff z = \frac{n\pi}{4} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$\implies$ $\sin(4z)$ har nullpunkt av orden 1 på innsida av C: $z = 0, \pm\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
\implies \oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin(4z)} dz &= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{4}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\bigg|_{z=-\frac{\pi}{4}} + \frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\bigg|_{z=0} + \frac{e^{-z^2}}{4\cos(4z)}\bigg|_{z=\frac{\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{\pi i}{2} \left(-e^{-\frac{\pi^2}{16}} + 1 - e^{-\frac{\pi^2}{16}} \right) = \frac{1}{2}\pi i \left(1 - 2e^{-\frac{\pi^2}{16}} \right)
\end{aligned}$$

16.4.3)

Set $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ => $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$, $\sin\theta = (z - z^{-1})/(2i)$, $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/(iz)$, slik at

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta} \mathrm{d}\theta &= \oint_C \frac{\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{5 - 4(z + z^{-1})/2} \frac{\mathrm{d}z}{iz}, \qquad C: |z| = 1 \\
&= \frac{-1}{4i} \oint_C \frac{z^2 - 2 + z^{-2}}{5z - 2(z^2 + 1)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{i}{4} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(-2z^2 + 5z - 2)} \mathrm{d}z \\
&= \frac{-i}{8} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z-2)(z-\frac{1}{2})} \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Integranden $f(z)$ har ein andreordens pol i $z = 0$, ein førsteordens pol i $z = 2$ og ein førsteordens pol i $z = 1/2$. Av desse ligg $z = 0$ og $z = 1/2$ innanfor einingssirkelen. Integralet blir dermed

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left(\frac{-i}{8}\right)2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^4-2z^2+1}{z^2-\frac{5}{2}z+1}\right)\right) + \lim_{z\to 1/2}\left(\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{(4z^3-4z)(z^2-\frac{5}{2}z+1)-(z^4-2z^2+1)(2z-\frac{5}{2})}{(z^2-\frac{5}{2}z+1)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^{-4}-2\cdot 2^{-2}+1}{2^{-2}(2^{-1}-2)}\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)$$
$$= \underline{\frac{\pi}{4}}$$

16.4.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

x^4+1 har 4 nullpunkt:

$$x^4+1=0 \Longleftrightarrow x^2 = i \implies x_1 = e^{\frac{\pi i}{4}} \quad x_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$$
$$x^2 = -i \implies x_3 = e^{\frac{3\pi i}{4}} \quad x_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$$

$\implies$ To nullpunkt i øvre halvplan: x_1 og x_3. Begge er av orden 1.

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{x=x_1}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right) + \operatorname*{Res}_{x=x_3}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)\right)$$
$$= 2\pi\left(\frac{i+1}{4e^{3i\frac{\pi}{4}}} + \frac{-i+1}{4e^{9i\frac{\pi}{4}}}\right)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{i+1}{4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)} + \frac{-i+1}{4\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)}\right)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{i+1}{4(-\sqrt{2}^{-1}+i\sqrt{2}^{-1})} + \frac{-i+1}{4(\sqrt{2}^{-1}+i\sqrt{2}^{-1})}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi i}{4}\left(\frac{i+1}{-1+i} + \frac{-i+1}{1+i}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{1}\right)\right) = \sqrt{2}\pi$$

T) Vi finn først laurentrekkene om $z = 1$ for $g(z) = 1/z$. Den har to slike laurentrekker, éi for $|z-1| < 1$ og éi for $|z-1| > 1$ fordi g berre har ein singularitet i origo. Begge skal ha forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, og vi finn dei ved å sjå på $g(z)$ som summen av ei geometrisk rekke. Først ei rekke som konvergerer for $|z-1| < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,\end{aligned}$$

så ei rekke som konvergerer for $|z-1| > 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+1/(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{-n}.\end{aligned}$$

Så finn vi laurentrekkene om $z = 1$ for $h(z) = e^z/(z-1)$. Det er berre éi slik laurentrekke, sidan $z = 1$ er den einaste singulariteten for h. Rekka skal ha forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Observer at $e^z = e^{z-1+1} = ee^{z-1}$, slik at maclaurinrekka til e^z gir

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{z-1} &\underset{w=z-1}{=} \frac{ee^w}{w} \\ &= \frac{e}{w}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \\ &= e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Denne rekka konvergerer for alle $|w| = |z-1| > 0$. Ved å kombinere desse to resultata får vi at

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n-1} \\ &= \frac{e}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1} + \frac{e}{(n+1)!}\right](z-1)^n,\end{aligned}$$

som konvergerer for $0 < |z-1| < 1$, og

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n-1},$$

som konvergerer for $|z-1|>1$.

Ua) $f(z)$ har fire enkle polar: $z_0=0$, $z_1=1/2$, $z_2=e^{2\pi i/3}/2$ og $z_3=e^{4\pi i/3}/2$. $f(z)$ vil derfor ha to ulike laurentrekker med sentrum i origo: éi som konvergerer for $0<|z|<1/2$ og éi som konvergerer for $|z|>1/2$. Forma på rekkene er $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Vi kan derfor sette $1/z$ utanfor i første omgang. $0<|z|<1/2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-8z^3} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(8z^3)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} 8^n z^{3n-1}. \end{aligned}$$

$|z|>1/2$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{8z^3}\cdot\frac{1}{1-1/(8z^3)} \\ &= \frac{1}{8z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8z^3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}}z^{-3n-4}. \end{aligned}$$

b) Vi bruker laurentrekka for $f(z)$ som gjeld for $|z|>1/2$ fordi C ligg i dette området. Då er

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^{n+1}}\oint_C z^{-3n-4}dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

fordi $\oint_C z^k dz = 0$ for alle heiltal $k\neq -1$.

Alternativt kan vi finne verdien av integralet ved residyrekning:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=0}f(z)+\mathrm{Res}_{z=1/2}f(z)+\mathrm{Res}_{z=e^{2\pi i/3}/2}f(z)+\mathrm{Res}_{z=e^{4\pi i/3}/2}f(z)]$$

der

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=0} &= \frac{1}{8\cdot 0^3-1} = -1, \\ \mathrm{Res}_{z=e^{k\pi i/3}/2} &= \left.\frac{1}{32z^3-1}\right|_{z=e^{k\pi i/3}/2} \\ &= \frac{1}{3} \text{ for } k=0,2,4, \end{aligned}$$

som igjen gir at $\oint_C f(z)dz = 0$.

Det andre integralet er integralet av ein ikkjeanalytisk funksjon. Det kan til dømes reknast ut slik:

$$\begin{aligned}\oint_C \mathrm{Re}\ z dz &= \oint_C \frac{z+\bar{z}}{2} dz \\ &= \frac{1}{2}\oint_C \bar{z} dz \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \\ &= \pi i,\end{aligned}$$

der vi har brukt at $\oint_C z dz = 0$ ved Cauchys integralteorem, og parametriseringa $z = e^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi$ for C, slik at $\bar{z} e^{-i\theta}$ og $dz = ie^{i\theta} d\theta$.