Løysingsforslag for TMA4120, Øving 11

November 10, 2016

15.3.4) Vi veit at potensrekka til $(1-z)^{-1}$ med sentrum i 0 er

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

a)

$$\begin{aligned}
(1-z)^{-2} &= ((1-z)^{-1})^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n+1 \text{ summandar}} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n
\end{aligned}$$

Her har vi rekna ut Cauchy-produktet der alle koeffisientane er 1 i begge rekkene.

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' \\
&= \left((1-z)^{-1}\right)' \\
&= (1-z)^{-2}
\end{aligned}$$

15.3.7) OBS: feil i fasit.
Skal finne konvergensradien til

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}(z+2i)^{2n}$$

a) Merk at rekka inneheld potensen $2n$, så ved å bruke Cauchy-Hadamard-likninga direkte får ein R^2 (sjå oppgåve 15.2.5)

$$\begin{aligned} R^2 &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n/5^n}{(n+1)/5^{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{(n+1)} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\implies \qquad R = \underline{\sqrt{5}}$$

b) Vi startar med rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}(z+2i)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}(z+2i)^2\right)^n \tag{1}$$

som konvergerer når $\left|\frac{(z+2i)^2}{5}\right| < 1$, divergerer når $\left|\frac{(z+2i)^2}{5}\right| > 1$ og har konvergensradius $R = \sqrt{5}$ $\quad (|z+2i|^2 < 5 \Leftrightarrow |z+2i| < \sqrt{5})$. Viss vi deriverer denne rekka og gongar kvart ledd med $\frac{z+2i}{2}$, så får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n}(z+2i)^{2n}$. Ifølge Teorem 3 (side 681) har ho lik konvergensradius $\sqrt{5}$. (At vi gongar kvart ledd med $(z+2i)/2$ endrar heller ikkje konvergensradien.)

15.3.16) La $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vere like.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= f(z) \\ &= f(-z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n z^n \end{aligned}$$

Vi har med dette to potensrekker for $f(z)$, så Teorem 2 seier at dei er like. Det gir $a_n = (-1)^n a_n$ for alle n. For n partal held dette alltid, men for n odde får vi $a_n = -a_n \implies a_n = 0$.

Døme på like funksjonar er $\cos z$ og $\cosh z$. Potensrekkene deira er gitt på side 695, og vi ser at alle ledda med oddetalspotens er 0.

15.4.5) OBS: feil i fasit.

Bruker rekka

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

som konvergerer for $|z| < 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8+z^4} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-z^4}{8}\right)} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-z^4}{8}\right)^n \\
&= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{8^{n+1}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{z^4}{8} + \frac{z^8}{64} - ...\right)}
\end{aligned}$$

Rekka konvergerer for

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-z^4}{8}\right| &< 1 \\
|z|^4 &< 8 \\
|z| &< 2^{3/4} \qquad \implies \qquad \underline{R = 2^{3/4}}
\end{aligned}$$

15.4.8)

$$\begin{aligned}
\sin^2 z &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

La $w = 2z$. Rekka til $\cos w = \cos 2z$ konvergerer for alle w, så rekka ovanfor konvergerer for alle z.

15.4.9) OBS: feil i fasit.
La $f(z) = \int_0^z \exp(-t^2)dt$. Vi har

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \exp(-z^2) \\
&= \sum_0^{\infty} \frac{(-z^2)^n}{n!} \\
&= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!} \\
\implies f(z) &= C + \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}
\end{aligned}$$

for ein konstant C. Sidan $f(0) = 0$, er $C = 0$, som gir

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Her har vi brukt Maclaurinrekka for e^z og integrert rekka til $f'(z)$ for å få rekka til $f(z)$. Maclaurinrekka til e^z har uendeleg konvergensradius, så det har også rekka vi fann for $f'(z)$. Ifølge Teorem 4 i 15.3 blir ikkje konvergensradien endra ved integrasjon, så Maclaurinrekka til $f(z)$ har uendeleg konvergensradius.

15.4.19) OBS: feil i fasit.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{(1-i)+(z+i)} \\
&= \frac{1}{(1-i)\left(1+\frac{z+i}{1-i}\right)} \\
&= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{-(z+i)}{1-i}}
\end{aligned}$$

Kan no bruke rekka for $1/(1-z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1-\frac{-(z+i)}{1-i}} &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-(z+i)}{1-i}\right)^n, \qquad \left|\frac{-(z+i)}{1-i}\right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+i)^n}{(1-i)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{1-i} - \frac{1}{(1-i)^2}(z+i) + \frac{1}{(1-i)^3}(z+i)^2 - ... \\
&= \underline{\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2}(z+i) + \left(\frac{-1}{4}+\frac{i}{4}\right)(z+i)^2 - ...}
\end{aligned}$$

Rekka konvergerer for

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-(z+i)}{1-i}\right| &< 1 \\
|z+i| &< |1-i| \\
|z+i| &< \sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{R = \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Alternativ metode for å finne rekka:
Kan bruke likning (1) side 690 direkte:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{med} \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\text{der} \qquad f(z) = \frac{1}{1+z}, \quad z_0 = -i$$

Deriverer nokre gongar for å finne $f^{(n)}(z)$:

$$f'(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \quad f'''(z) = \frac{-6}{(1+z)^4}$$

$$\begin{aligned} \implies \quad f^{(n)}(z) &= \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}} \\ f^{(n)}(-i) &= \frac{(-1)^n n!}{(1-i)^{n+1}} \\ \implies \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} \end{aligned}$$

Som gir rekka

$$\underline{\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+i)^n}{(1-i)^{n+1}}}$$

15.4.24)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z(z-2)} &= \mathrm{e}^{z^2-2z} \\ &= \mathrm{e}^{(z-1)^2-1} \end{aligned}$$

Kan no bruke rekka for e^z, som konvergerer for alle z:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(z-1)^2-1} &= \mathrm{e}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((z-1)^2\right)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n!} \\ &= \underline{\frac{1}{\mathrm{e}} \left(1 + (z-1)^2 + \frac{(z-1)^4}{2} + \frac{(z-1)^6}{6} + \ldots \right)} \end{aligned}$$

med konvergensradius $\underline{R = \infty}$.

15.R.14) Viser at rekka konvergerer absolutt for alle z og dermed har konvergensradius $R = \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^5 (z-3i)^{2(n+1)}/(n+1)!}{n^5 (z-3i)^{2n}/n!} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{|z-3i|^2}{n+1} \\ &= 0 < 1, \end{aligned}$$

sidan $|z-3i|^2$ er konstant og $(n+1)/n$ går mot 1. Ved forholdstesten (side 676) konvergerer rekka absolutt.

15.R.18) Vi ser på formelen for $\sin z$ side 695 at dette er rekka til $\sin \pi z$, som er analytisk i heile $\mathbb{C}$, så konvergensradien er $R = \infty$.

15.R.26) Vi vil skrive z^n på forma $z^5 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$. Bruker (1) side 690.

$$\begin{aligned}
&a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(i) \\
\implies &a_0 = i^5 = i, \\
&a_1 = 5i^4 = 5, \\
&a_2 = \frac{5 \cdot 4 i^3}{2} = -10i, \\
&a_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 i^2}{3!} = -10, \\
&a_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2i}{4!} = 5i, \\
&a_5 = \frac{5!}{5!} = 1, \\
&a_n = 0 \text{ for alle } n > 5 \\
\implies &z^5 = i + 5(z-i) - 10i(z-i)^2 - 10(z-i)^3 + 5i(z-i)^4 + (z-i)^5.
\end{aligned}$$

Sidan dette er eit endeleg polynom er konvergensradien $R = \infty$.

15.R.29) La $w = \frac{z}{3} - 1$. Bruker formelen for $\mathrm{Ln}(1+z)$ side 695 og får

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\left(\frac{z}{3}\right) &= \mathrm{Ln}(1+w) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\frac{z}{3} - 1)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3)^n}{3^n n} \\
\implies \mathrm{Ln}(z) &= \mathrm{Ln}(3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-3)^n}{3^n n}.
\end{aligned}$$

Rekka konvergerer for $|w| = |z/3 - 1| < 1 \Leftrightarrow |z - 3| < 3$, så konvergensradien er $R = 3$.