Løysingsforslag for TMA4120, Øving 10

November 2, 2016

14.3.3) La $f(z) = z^2/(z^2-1)$ og C vere kurva som består av alle punkt z slik at $|z+i| = 1.41$.

$$
\begin{aligned}
|-1+i| &= \sqrt{2} > 1.41 \\
|1+i| &= \sqrt{2} > 1.41
\end{aligned}
$$

$\implies$ -1 og 1 er på utsida av C. Dette er dei einaste punkta der f ikkje er analytisk, så $f(z)$ er analytisk i $D = \{z : |z+i| \leq 1.41 + \epsilon\}$ for ein $\epsilon > 0$. Dermed kan vi bruke Cauchys integralteorem, som gir oss

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

14.3.18) La $f(z) = \sin z/z$. Då er f analytisk på kvadrata i figuren, i tillegg til området mellom kvadrata, så Cauchys integralformel held for kurva C og punktet $z_0 = 2i$:

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz} dz &= \frac{1}{4} \oint_C \frac{f(z)}{z-2i} dz \\
&= \frac{2\pi i f(2i)}{4} \\
&= \frac{\pi \sin 2i}{4}.
\end{aligned}
$$

14.4.3) OBS: feil i fasit.

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z, \qquad n = 1, 2, ...$$

Bruker formelen for den deriverte til analytiske funksjonar (Teorem 1):

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad n = 1, 2, ...$$

(Formelen gjeld også for $n = 0$, og er då berre Cauchys integralformel.)

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_0)$$

med

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{e}^{-z} \\ z_0 &= 0 \end{aligned}$$

Deriverer $f(z)$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\mathrm{e}^{-z} \\ f''(z) &= \mathrm{e}^{-z} \\ f^{(3)}(z) &= -\mathrm{e}^{-z} \\ f^{(4)}(z) &= \mathrm{e}^{-z} \end{aligned}$$

$$=> \quad f^{(n-1)}(0) = (-1)^{n+1}$$

Dermed blir svaret

$$\underline{\oint_C \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}(-1)^{n+1}.}$$

14.4.4) Bruker Teorem 1 med $f(z) = e^z \cos z$, $n = 2$ og $z_0 = \pi/4$. Vi har $f'(z) = e^z \cos z - e^z \sin z$ og

$$f''(z) = e^z \cos z - 2e^z \sin z - e^z \cos z = -2e^z \sin z.$$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z \cos z}{(z - \pi/4)^3} dz &= \frac{2\pi i f''(\pi/4)}{2!} \\ &= \pi i(-2e^{\pi/4} \sin(\pi/4)) \\ &= -\sqrt{2}\pi i e^{\pi/4} \end{aligned}$$

14.4.8) Her kan vi bruke Teorem 1 direkte med $n = 2$, $f(z) = z^3 + \sin z$ og $z_0 = i$, sidan f er analytisk i heile $\mathbb{C}$, og C omsluttar i.

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz \\ &= \frac{f''(i) 2\pi i}{2!} \\ &= f''(i)\pi i \end{aligned}$$

Vi har $f''(z) = 6z - \sin z$, så $f''(i) = 6i - \sin i$. Svaret blir dermed

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^3 + \sin z}{(z-i)^3} dz &= (6i - \sin i)\pi i \\ &= -(6 + i \sin i)\pi\end{aligned}$$

14.4.15) Legg merke til at integranden er analytisk i eit domene som inneheld dei to sirklane og området mellom dei, så her treng vi ikkje å gjere noko meir komplisert enn å bruke Cauchys integralteorem for multiply connected domains (side 658). Integralet er altså 0.

15.1.1)

$$\begin{aligned}(1+i)^{2n} &= ((1+i)^2)^n \\ &= (2i)^n \\ &= 2^n i^n \\ \Longrightarrow\ z_n = \frac{(1+i)^{2n}}{2^n} &= i^n\end{aligned}$$

Dette betyr at følga $z_1, z_2, \ldots$ er begrensa, men ikkje konvergent. Grensepunkta er ± 1, $\pm i$.

15.1.2)

$$\begin{aligned}\frac{z_{n+1}}{z_n} &= \frac{(1+2i)^{n+1} n!}{(1+2i)^n (n+1)!} \\ &= \frac{1+2i}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

når $n \to \infty$. Dermed må også følga $z_1, z_2, \ldots$ gå mot 0. (Intuitivt går ledda mot 0 fordi nemnaren veks mykje raskare enn tellaren.)

15.1.16)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(20+30i)^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{20+30i}{n+1}\right| \to 0 \Longrightarrow \text{konvergent}$$

15.1.17) OBS: feil i fasit.
La oss starte med å sjå på ei vilkårleg rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

der a_n er reell for alle n, som har desse eigenskapane: $|a_k| > |a_l|$ for alle $k < l$, $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, og a_n er positiv for n like, og negativ for n odde. La s_n vere den $n$te delsummen, altså

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Vi har

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} + a_{2n+1} = |a_{2n+2}| - |a_{2n+1}| > 0,$$

som betyr at $s_2 < s_4 < s_6 < \dots$. Samtidig er

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n+1} + a_{2n} = -|a_{2n+1}| + |a_{2n}| < 0,$$

så vi har også $s_1 > s_3 > s_5 > \dots$. I tillegg går $s_{n+1} - s_n$ mot 0 når n går mot uendeleg, så einaste moglegheita er at delsummane har ei grense, og rekka konvergerer.

Viss vi no ser på rekka vi skulle studere, ser vi at vi kan skrive

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2n} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)},$$

gitt at begge rekkene på høgre side konvergerer. Men begge rekkene er av typen vi såg på ovanfor. Dermed konvergerer dei, så rekka på venstre side konvergerer også.

15.1.19) Vi skal finne ut om rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2-\mathrm{i}}$ konvergerer. Vi har $z_n = \frac{\mathrm{i}^n}{n^2-\mathrm{i}}$ og $|z_n| = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} < \frac{1}{n^2}$ for $n \geq 1$. Samanlikningstesten gir at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2-\mathrm{i}}$ konvergerer fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Då konvergerer rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2-\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^2-\mathrm{i}}$.

15.1.30) Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{|z_{n+k}|}{|z_{n+1}|} &= \frac{|z_{n+k}|}{|z_{n+k-1}|} \frac{|z_{n+k-1}|}{|z_{n+k-2}|} \cdots \frac{|z_{n+2}|}{|z_{n+1}|} \\
&= \left|\frac{z_{n+k}}{z_{n+k-1}}\right| \left|\frac{z_{n+k-1}}{z_{n+k-2}}\right| \cdots \left|\frac{z_{n+2}}{z_{n+1}}\right| \\
&\leq q^{k-1}.
\end{aligned}$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} z_m\right| \\
&\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |z_m| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_{n+1}| q^{k-1} \\
&= |z_{n+1}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\
&= \frac{|z_{n+1}|}{1-q}.
\end{aligned}
$$

La $z_n = (n+i)/(2^n n)$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| &= \left|\frac{2^n n(n+i+1)}{2^{n+1}(n+1)(n+i)}\right| \\
&= \left|\frac{n(n+i)+n}{2(n(n+i)+n+i)}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Dermed held $|R_n| \leq 2|z_{n+1}|$.

$$
\begin{aligned}
|z_4| &= \left|\frac{4+i}{2^4 \cdot 4}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2^4} + \frac{i}{64}\right| \\
&\leq \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \\
&< \frac{1}{10} \\
\implies |z_5| &< \frac{1}{20}
\end{aligned}
$$

$\implies$ Summen av dei fire første ledda gir eit estimat som er mindre enn $1/20$ frå summen. Estimatet vårt blir då

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{4} z_n &= \frac{1+i}{2} + \frac{2+i}{8} + \frac{3+i}{24} + \frac{4+i}{64} \\
&= \frac{32+16+8+4}{64} + \frac{96+24+8+3}{192} i \\
&= \frac{15}{16} + \frac{131}{192} i.
\end{aligned}
$$

15.2.5) La $w = z^2$.

$$\begin{aligned}\sum a_n z^{2n} &= \sum a_n \left(z^2\right)^n \\ &= \sum a_n w^n.\end{aligned}$$

Vi veit at denne rekka konvergerer for $|w| = |z^2| < R \Leftrightarrow |z| < \sqrt{R}$ og divergerer for $|w| = |z^2| > R \Leftrightarrow |z| > \sqrt{R}$, så konvergensradien for $\sum a_n z^{2n}$ er $\sqrt{R}$.

15.2.6) Senteret er 1. Ved forholdstesten konvergerer rekka dersom $|2(z - 1)| < 1$, og divergerer dersom $|2(z-1)| > 1$, så konvergensradien er $1/2$.

15.2.9) OBS: feil i fasit.
Senteret er $-i$. La

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2^n}(z+i)^{2n}.$$

Vi har

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(z+i)^2}{2(n-1)}\right|.$$

Når $n \to \infty$, går $(n+1)/(n-1)$ mot 1, så rekka konvergerer viss $|z+i|^2 < 2$ og divergerer viss $|z+i|^2 > 2$. Det betyr at konvergensradien er $\sqrt{2}$.