NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4120 Matematikk 4K**

Faglig kontakt under eksamen: Katrin Grunert[a], Eduardo Ortega-Esparza[b]

Tlf: [a] 411 87 331 , [b] 46 76 00 87

Eksamensdato: august 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + 2y(t) = 2\sin(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Oppgave 2 Fourierrekken til funksjonen $f(x) = \cosh(x)$ på intervallet $[-\pi, \pi]$ er

$$\frac{1}{\pi}\sinh(\pi)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos(nx)\right).$$

Skisser summen av Fourierrekken til $f(x)$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. Bruk Fourierrekken til å regne ut summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

Oppgave 3

a) Finn alle løsninger av Laplaceligningen

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

b) Finn en løsning av (1) som i tillegg til (2) også tilfredsstiller

$$u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u_y(x,\frac{\pi}{2}) = (1+\cos(x))^2, \quad 0 < x < \pi.$$

Oppgave 4 Funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er definert ved

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{og} \quad g(x) = xe^{-x^2}.$$

La $h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp$ være konvolusjonen av f og g. Bruk Fouriertransformen for å vise at

$$h(x) = (f \star g)(x) = -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty} we^{-\frac{w^2}{2}}e^{iwx}dw.$$

Hint: $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$ $(a > 0)$

Oppgave 5 Vis ved hjelp av Cauchy-Riemann ligningene at

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

er analytisk på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Oppgave 6 La $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$.

a) Vis at

$$\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0,$$

der sirkelen er orientert mot klokka.

b) En av Laurentrekkene til $f(z)$ med sentrum i $z = i$ konvergerer i punktet $z = 2i$. Hva er (det største) konvergensområdet til denne rekken?

Oppgave 7 La $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$. Beregn ved hjelp av residueregning

$$\int_0^\infty f(x)dx.$$

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$