NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4120 Matematikk 4K**

Faglig kontakt under eksamen: Katrin Grunert[a], Eduardo Ortega-Esparza[b]

Tlf:

Eksamensdato: 10. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y'(t) + 4y(t) = \delta(t-2) + e^{4t}, \quad y(0) = 0,$$

der δ er deltafunksjonen.

Oppgave 2 La funksjonen f være definert ved $f(x) = x$ for $-\pi < x < \pi$. Finn Fourierrekken til $f(x)$. Skisser summen av Fourierrekken til $f(x)$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. Finn verdien til Fourierrekken til $f(x)$ i punktet $x = \pi$.

Oppgave 3

a) Finn alle løsninger av den partielle differensialligningen

$$u_{xx}(x,t) + 4u(x,t) = u_t(x,t), \quad x \in [0,\pi], \quad t \geq 0, \tag{1}$$

på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

b) Finn en løsning $u(x,t)$ av (1) som i tillegg til randbetingelsene (2) også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin(\frac{3}{2}x) + 2\sin(\frac{5}{2}x) + 3\sin(\frac{7}{2}x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Oppgave 4 Bestem den reelle funksjonen $u(x,y)$ slik at den komplekse funksjonen

$$f(z) = u(x,y) + i(y + 2xy), \quad \text{hvor } z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

blir en hel funksjon, dvs. at $f(z)$ er analytisk i hele $\mathbb{C}$, og $f(0) = 1$.

Oppgave 5 La

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}} + \frac{1}{z(z-2)}.$$

a) Finn og klassifiser de singulære punktene til funksjonen $f(z)$.

b) Finn begge Laurentrekkene til $f(z)$ med sentrum i $z = 2$.

Oppgave 6 La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

a) La S_R betegne halvsirkelen med radius R i øvre halvplan. La $w > 0$ og bruk ML-ulikheten til å vise at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(x) e^{ixw} dx = 0.$$

Vis alle estimater.

b) Bruk resultatet fra a) og residueregning til å finne $\hat{f}(-\pi)$, den Fourier-transformerte til $f(x)$ i punktet $x = -\pi$.

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$