Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag


**Løsningsforslag**

$\boxed{1}$

**Løsning:**

$$y'(t) + 4y(t) = \delta(t-2) + e^{4t}, \qquad y(0) = 0.$$

La $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ være Laplace-transformasjonen til $y$. Da er

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y' + 4y\} &= \mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} \\ &= sY - y(0) + 4Y\end{aligned}$$

og

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-2) + e^{4t}\right\} = e^{-2s} + \frac{1}{s-4}.$$

Dvs.

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+4} + \frac{1}{s^2+4^2} = \frac{e^{-2s}}{s+4} + \frac{1}{4}\frac{4}{s^2-4^2}.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= e^{-4(t-2)}u(t-2) + \frac{1}{4}\sinh 4t\end{aligned}$$

der $u(t-2) = 1$ for $t \geq 2$, null ellers.

$\boxed{2}$

**Løsning:**

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Fourier-rekken til $f$ er

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

fordi $f$ er odde. Vi har at

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big|_0^\pi -\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\Big|_0^\pi \sin nx\right) \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

Fourier-rekken til $f$ er altså

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

som også er Fourer-rekken til den $2\pi$-periodiske utvidelsen av $f$.

I punktet $x = \pi$ er verdien lik

$$\Big|_{x=\pi} 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} 0 = 0.$$

$\boxed{3}$

**Løsning: a)**

$$u_{xx} + 4u = u_t, \qquad x \in [0,\pi],\ t \geq 0.$$
$$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Anta at $u(x,t) = F(x)G(t)$. Da er $u_{xx} = F''G$, $u_t = FG'$ og

$$F''G + 4FG = FG'.$$

Dvs.

$$\frac{F'' + 4F}{F} = \frac{G'}{G} = \mu, \quad \text{konstant.}$$

Dermed er $G(t) = Ke^{\mu t}$ og $F'' + (4-\mu)F = 0$ der $F$ har generell løsning

$$
\begin{aligned}
&F(x) = A\sin\omega x + B\cos\omega x, && \omega := \sqrt{4-\mu}, && \text{hvis } \mu < 4,\\
&F(x) = Ax + B, && && \text{hvis } \mu = 4,\\
&F(x) = A\sinh\omega x + B\cosh\omega x, && \omega := \sqrt{\mu-4}, && \text{hvis } \mu > 4.
\end{aligned}
$$

Randbetingelsene $0 = F(0)G(t) = F'(\pi)G(t)$ gir at løsningen er triviell, $G(t) \equiv 0$, eller $F(0) = F'(\pi) = 0$. Det eneste tilfellet som ikke gir $A = B = 0$ er $\mu < 4$. I såfall er $B = 0$

og

$$\begin{aligned} 0 = F'(\pi) &= \omega A \cos \omega\pi \\ &\Longleftrightarrow \\ \omega\pi &= \frac{\pi}{2} + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &\Longleftrightarrow \\ \sqrt{4-\mu} &= \frac{1}{2} + n \\ &\Longleftrightarrow \\ \mu = \mu_n &:= 4 - \left(\frac{1}{2} + n\right)^2. \end{aligned}$$

Skriv $\omega_n := \frac{1}{2} + n$. Dermed er alle løsninger av type $u = FG$ på formen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) := Ae^{(4-\omega_n^2)t} \sin \omega_n x, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

**Løsning: b)**

$$u(x,0) = \sin \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} + 3 \sin \frac{7x}{2}$$

Ettersom ligningen er lineær og randbetingelsene er homogene, vil også en uniformt konvergerende sum på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(4-\omega_n^2)t} \sin \omega_n x$$

være en løsning. La $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ og $b_3 = 3$. Da er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{3} b_n e^{(4-\omega_n^2)t} \sin \omega_n x$$

en løsning som åpenbart tilfredsstiller initialbetingelsen.

$\boxed{4}$

**Løsning:**

$$f(z) = u(x,y) + i(y + 2xy), \qquad f(0) = 1.$$

La $v(x,y) = y + 2xy$. Hvis $f$ er analytisk i $\mathbb{C}$, så er $u_x = v_y$ og $u_y = -v_x$ ved Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int u_x \, \mathrm{d}x \\ &= \int v_y \, \mathrm{d}x \\ &= \int (1 + 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= x + x^2 + C_1(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int u_y \, \mathrm{d}y \\ &= \int -v_x \, \mathrm{d}y \\ &= \int -2y \, \mathrm{d}y \\ &= -y^2 + C_2(x). \end{aligned}$$

Dermed må $C_1(y) = -y^2 + c$ og $u = x + x^2 - y^2 + c$. Ettersom $u(0,0) = 1$ er $c = 1$. Altså

$$u(x,y) = x + x^2 - y^2 + 1.$$

$\boxed{5}$

**Løsning: a)**

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}} + \frac{1}{z(z-2)}.$$

Ved delbrøkoppspaltning og Taylor-rekken til eksponentialfunksjonen, er

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{z-2} \right)^n - \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-2}$$

og vi ser at $f$ har en **essensiell singularitet** i $z = 2$ og en **enkel pol** i $z = 0$.

**Løsning: b)**
La $w = z - 2$. Da er

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2+w} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-w/2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n \end{aligned}$$

for $|w/2| < 1$. Dvs. for $|z-2| < 2$. Vi har også at

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2+w} \\ &= \frac{1}{w} \frac{1}{1-(-2/w)} \\ &= \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{1}{w^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{1}{(z-2)^{n+1}} \end{aligned}$$

for $|2/w| < 1$. Dvs. for $|z-2| > 2$.

Laurent-rekken til $f$ med sentrum i $z = 2$ som konvergerer for $0 < |z-2| < 2$ er da

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n - \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n - 1/2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n + 1/2\frac{1}{z-2} \\
&= 3/4 + 3/2\frac{1}{z-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-2)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-2)^n.
\end{aligned}$$

Laurent-rekken til $f$ med sentrum i $z = 2$ som konvergerer for $|z-2| > 2$ er

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n - \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-2}\right)^n - 1/2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n \frac{1}{(z-2)^{n+1}} + 1/2\frac{1}{z-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-2)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n-2}\frac{1}{(z-2)^n} + 1/2\frac{1}{z-2} \\
&= 1 + \frac{1}{z-2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} + (-2)^{n-2}\right)\frac{1}{(z-2)^n}.
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$

**Løsning: a)**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

La $S_R$ være halvsirkelen med radius $R$ i øvre halvplan.

Vi har at

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 + 1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-\overline{z_0})}$$

med poler i $z = z_0 := 1 + i$ og $z = \overline{z_0}$. For $z = x + iy \in S_R$ er $|z| = R$ og dermed er

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{|z-z_0||z-\overline{z_0}|} \\
&\leq \frac{1}{\big||z| - |z_0|\big|\big||z| - |\overline{z_0}|\big|} \\
&= \frac{1}{(R-\sqrt{2})^2}.
\end{aligned}$$

For $w > 0$ er

$$|e^{izw}| = |e^{i(x+iy)w}| = |e^{ixw}||e^{-yw}| = |e^{-yw}| \leq 1$$

fordi $y \geq 0$.

Videre er lengden av $S_R$ lik $\pi R$. Ved $ML$-estimatet er derfor

$$\left| \int_{S_R} f(z) e^{izw} \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{\pi R}{(R - \sqrt{2})^2}$$

og vi ser at

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} f(z) e^{izw} \, \mathrm{d}z = 0.$$

**Løsning: b)**
Ved delbrøkoppspaltning er

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)(z - \overline{z_0})} \\ &= \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z - \overline{z_0}} - \frac{1}{z - z_0} \right). \end{aligned}$$

La $w > 0$. Funksjonen $f(z) e^{izw}$ har dermed en enkel pol i $z_0$ med residy

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) e^{izw} = -\frac{i}{2} e^{iz_0 w}.$$

La $\tilde{S}_R := S_R \cup [-R, R]$. Polen $\overline{z_0}$ ligger ikke innenfor $\tilde{S}_R$. For $R > \sqrt{2}$ er da

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{S}_R} f(z) e^{izw} \, \mathrm{d}z &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) e^{izw} \\ &= -2\pi i \frac{i}{2} e^{iz_0 w} \\ &= \pi e^{-(1-i)w}. \end{aligned}$$

Ved å la $R$ gå mot $\infty$ på begge sider, får vi

$$\begin{aligned} \pi e^{-(1-i)w} &= \lim_{R \to \infty} \int_{\tilde{S}_R} f(z) e^{izw} \, \mathrm{d}z \\ &= \lim_{R \to \infty} \left( \int_{S_R} f(z) e^{izw} \, \mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} f(x) e^{ixw} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixw} \, \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(-w), \end{aligned}$$

den Fourier-transformerte til $f$ i punktet $-w$. Dermed er

$$\hat{f}(-\pi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-(1-i)\pi} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi}.$$