Eksamen i TMA4120 Matematikk 4K og MA2105 Kompl. f.teori med diff.likninger 13.08.2014

Løsningsforslag

1 Laplace-transformasjon av initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = u(t-\pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

gir

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - s + 2(sY(s) - 1) + 2Y(s) = e^{-\pi s}/s \\
&(s^2 + 2s + 2)Y(s) = s + 2 + e^{-\pi s}/s \\
&Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2s+2)}.
\end{aligned}$$

Vi delbrøkoppspalter uttrykket $\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right)$$

og får

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right)e^{-\pi s}.$$

Inverstransformasjon av den siste ligningen gir

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\cos t + \sin t)e^{-t} + \frac{1}{2}\left(1 - \cos(t-\pi)\cdot e^{-(t-\pi)} - \sin(t-\pi)\cdot e^{-(t-\pi)}\right)u(t-\pi) \\
&= (\cos t + \sin t)e^{-t} + \frac{1}{2}\left(1 + \cos t\cdot e^{-(t-\pi)} + \sin t\cdot e^{-(t-\pi)}\right)u(t-\pi) \\
&= \begin{cases} (\cos t + \sin t)e^{-t} & \text{for } 0 \le t \le \pi, \\ (\cos t + \sin t)e^{-t}(1 + \frac{e^{\pi}}{2}) + \frac{1}{2} & \text{for } t \ge \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

2 **a)**

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x(-\frac{1}{n}\cos nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{n}\cos nx)dx = -\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

så Fourier-sinusrekken blir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2}\right)\sin nx.$$

Rekken kan deles opp i odde og like ledd (dette kreves ikke, men tas med i tilfelle noen gjør det under eksamen): $b_{2k} = -\frac{1}{2k}\cos k\pi = \frac{1}{2k}(-1)^{k+1}$, $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = \frac{2}{(2k-1)^2}(-1)^{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Vi får:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2})\sin nx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}(-1)^{k+1}\sin 2kx + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^2}(-1)^{k+1}\sin(2k-1)x.\end{aligned}$$

Det kan også vises (dette kreves heller ikke) at hvis vi betegner den første summen med $s_1(x)$ og den andre med $s_2(x)$, så har vi

$$s_1(x) = \begin{cases} x/2 & \text{for } 0 \le x < \pi/2 \\ x/2 - \pi/2 & \text{for } \pi/2 < x \le \pi \end{cases} \qquad s_2(x) = \begin{cases} x/2 & \text{for } 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi/2 - x/2 & \text{for } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

b) Med $u(x,t) = X(x)T(t)$ har vi

$$XT' + 2XT = 9X''T \Longrightarrow \frac{T'}{T} + 2 = 9\frac{X''}{X} = k = \text{en konstant.}$$

Standard drøfting (under de gitte randbetingelsene) gir at vi må ha $k < 0$ for å få løsninger $X(x)$ forskjellig fra null-løsningen. Så vi setter $k = -p^2 < 0$. For $X(x)$ gir dette differensialligningen

$$9\frac{X''}{X} = -p^2, \quad \text{dvs. } X'' + \frac{p^2}{9}X = 0,$$

som har løsning $X(x) = A\cos\frac{p}{3}x + B\sin\frac{p}{3}x$. Innsetting av randbetingelsene gir $X(0) = A = 0$, $X(\pi) = B\sin\frac{p}{3}\pi = 0$. For å få ikke-trivielle løsninger må vi ha $B \neq 0$, dvs., p må velges slik at $\sin\frac{p}{3}\pi = 0$. Dette gir følgende muligheter for p: $\frac{p}{3}\pi = n\pi$, dvs., $p = 3n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Så for hvert naturlig tall n har vi en mulig løsning X_n for X, gitt ved:

$$X_n(x) = B_n\sin\frac{3n}{3}x = B_n\sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

hvor konstantene B_n kan velges fritt og uavhengig av hverandre. For $T(t)$ gir dette, for hver $n = 1, 2, 3, \ldots$, en løsning $T_n(t)$, gitt som løsning av differensialligningen

$$\frac{T'}{T} + 2 = k = -p^2 = -9n^2, \text{dvs. } T(t) = T_n(t) = C_n e^{-(2+9n^2)t}, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Konstanten C_n kan sløyfes da den blir absorbert av B_n når X og T ganges sammen. For $u(x,t) = X(t)T(t)$ får vi da for hver n en løsning $u_n(x,t)$ gitt ved

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = B_n\sin nx \cdot e^{-(2+9n^2)t}, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

og disse er alle løsningene på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som oppfyller differensialligningen og de gitte randbetingelsene.

c) For å bestemme løsningen som i tillegg til differensialligningen og randbetingelsene også tilfredstiller initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$ – hvor $f(x)$ er funksjonen fra **a)** – prøver vi med en sum av produktløsninger:

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \cdot e^{-(2+9n^2)t}$. Kravet $u(x,0) = f(x)$ gir $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx = f(x)$, $0 \le x \le \pi$, dvs., $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$ må være Fourier-sinusrekken til f. Dette betyr at $B_n = b_n = -\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2}$. Så løsningen blir

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2} \right) \sin nx \cdot e^{-(2+9n^2)t}.$$

Som i pkt. **a)** kan denne summen splittes opp i odde og like ledd (dette kreves fortsatt ikke):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}(-1)^{k+1} \sin 2kx \cdot e^{-(2+36k^2)t} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2}(-1)^{k+1} \sin(2k-1)x \cdot e^{-(2+9(2k-1)^2)t}. \end{aligned}$$

3 **a)** Funksjonen $g_w(z) = e^{-iwz}/(1+z^2)$ har en første ordens pol i hvert av punktene $z = \pm i$ og ingen andre singulære punkter.

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=i} g_w(z) &= \lim_{z\to i}(z-i)g_w(z) = \left.\frac{e^{-iwz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^w}{2i} \\ \operatorname*{Res}_{z=-i} g_w(z) &= \lim_{z\to -i}(z+i)g_w(z) = \left.\frac{e^{-iwz}}{z-i}\right|_{z=-i} = -\frac{e^{-w}}{2i} \end{aligned}$$

b) Med $z = x+iy$ og $|z| = R > 1$ har vi

$$|g_w(z)| = \left| e^{-iw(x+iy)}/(1+z^2) \right| = e^{wy}/\left|(1+z^2)\right| \le e^{wy}/(R^2-1).$$

Anta $w \le 0$ og $z \in \Gamma_R^+$. Da er $y \ge 0$, så $wy \le 0$ og dermed $e^{wy} \le 1$. Det følger at $|g_w(z)| \le e^{wy}/(R^2-1) \le 1/(R^2-1)$.
Anta så at $w \ge 0$ og $z \in \Gamma_R^-$. Da er $y \le 0$, så $wy \le 0$ og dermed nok en gang $e^{wy} \le 1$. Det følger at $|g_w(z)| \le e^{wy}/(R^2-1) \le 1/(R^2-1)$ også i dette tilfellet.

c) Anta først at $w \le 0$. Vi integrerer $g_w(z)$ langs den lukkede, positivt orienterte kurven bestående av det reelle intervallet fra $-R$ til R og halvsirkelen Γ_R^+. Denne kurven omslutter det singulære punktet $z = i$, og residysatsen gir

$$\int_{-R}^{R} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + \int_{\Gamma_R^+} g_w(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} g_w(z) = 2\pi i \frac{e^w}{2i} = \pi e^w. \qquad (*)$$

Fra resultatet i **b)** følger at $\left|\int_{\Gamma_R^+} g_w(z)dz\right| \le \pi R/(R^2-1)$, så $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^+} g_w(z)dz = 0$. Vi tar grensen når $R \to \infty$ på begge sider av ligningen (*), og får:

$$\begin{aligned} &\lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + \int_{\Gamma_R^+} g_w(z)dz \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx = \pi e^w \quad \text{når } w \le 0. \end{aligned}$$

Anta så $w \ge 0$. Denne gangen integrerer vi langs den lukkede, positivt orienterte kurven bestående av det reelle intervallet fra R til $-R$ (merk at vi her må gå i negativ retning langs x-aksen pga. kurvens orientering) og halvsirkelen Γ_R^-. Denne kurven omslutter det singulære punktet $z = -i$, og residysatsen gir:

$$\int_R^{-R} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + \int_{\Gamma_R^-} g_w(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} g_w(z) = 2\pi i \frac{e^{-w}}{-2i} = -\pi e^{-w}. \quad (**)$$

Fra resultatet i **b)** følger at $\left|\int_{\Gamma_R^-} g_w(z)dz\right| \leq \pi R/(R^2-1)$, så $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} g_w(z)dz = 0$. Vi tar grensen når $R \to \infty$ på begge sider av ligningen (**), og får:

$$\lim_{R\to\infty} \left(\int_R^{-R} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + \int_{\Gamma_R^+} g_w(z)dz \right)$$
$$= \int_\infty^{-\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx + 0 = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx = -\pi e^{-w}$$

dvs., $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx = \pi e^{-w}$ når $w \geq 0$.

Alt i alt har vi vist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx = \begin{cases} \pi e^{w} & \text{når } w \leq 0 \\ \pi e^{-w} & \text{når } w \geq 0 \end{cases} = \pi e^{-|w|} \quad \text{for alle reelle } w.$$

Siden $\mathcal{F}\left(1/(1+x^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}/(1+x^2)dx$, betyr dette at

$$\mathcal{F}\left(1/(1+x^2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi e^{-|w|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|w|}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Funksjonen $f(z) = e^{2/(z-1)} + e^{1/(z+1)^2} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5}$ har tre mulige singulære punkter: $z = 1$, $z = -1$ og $z = 0$.

$\boxed{z = 1:}$ Vi har $e^{2/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n}$ for $z \neq 1$. De to andre funksjonene er analytiske i $z = 1$, så vi kan skrive $e^{1/(z+1)^2} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ for z i en viss omegn om $z = 1$ (Taylorrekke om $z = 1$). Det betyr at Laurentrekken til $f(z)$ om $z = 1$ har formen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n.$$

Siden prinsipaldelen (rekken med negative eksponenter) har uendelig mange ledd, er $z = 1$ en *essensiell singularitet* for $f(z)$.
Residyet er koeffisienten til leddet med eksponent lik -1. Fra Laurentrekken ser vi at den er lik 2, så

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2.$$

$\boxed{z = -1:}$ Vi har $e^{1/(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^{2n}}$ for $z \neq -1$. De to andre funksjonene er analytiske i $z = -1$, så vi kan skrive $e^{2/(z-1)} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z+1)^n$ for z i en viss omegn om $z = -1$ (Taylorrekke om $z = -1$). Det betyr at Laurentrekken til $f(z)$ om $z = -1$ har formen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z+1)^n.$$

Siden prinsipaldelen har uendelig mange ledd, er $z = -1$ en *essensiell singularitet* for $f(z)$.
Her ser vi at leddet med eksponent lik -1 mangler, så

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = 0.$$

$\boxed{z = 0:}$ Vi har $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, så $\sin z - z + \frac{1}{3!}z^3 = \frac{1}{5!}z^5 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ og dermed

$$\frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5} = \frac{1}{5!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-4} \quad (z \neq 0).$$

Det følger at $\frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5}$ kan gjøres analytisk i $z = 0$ ved å gi den verdien $\frac{1}{5!}$ der. Så $z = 0$ er en *hevbar singularitet* for denne funksjonen og dermed også for $f(z)$ siden de to andre funksjonene er analytiske i origo. – Dette resultatet kunne også vært oppnådd ved fem gangers bruk av l'Hôpitals regel.
Siden vi har en hevbar singularitet, mangler leddet med eksponent lik -1 her også, så

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

b) (i) Sirkelen $|z| = 1/2$ omslutter ingen andre singulariteter enn den hevbare singulariteten i origo, så

$$\int_{|z|=1/2} f(z)\, dz = 0.$$

(ii) Sirkelen $|z| = 2$ omslutter de essensielle singularitetene $z = 1$ og $z = -1$. Fra **a)** har vi at $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 2$ og $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = 0$, så vi får

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \right) = 2\pi i\,(2 + 0) = 4\pi i.$$