NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamen i
TMA4120/MA2105 Matematikk 4K/Kompleks funksjonsteori med differensiallikninger

Faglig kontakt under eksamen Berit Stensønes

Tlf 968 54 060

Eksamensdato 13. august 2014

Eksamenstid (fra–til) 9:00 – 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler
Kode C:

- 1 A4-ark med håndskrevne notater.
- Bestemt, enkel kalkulator.
- Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annen informasjon
Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk Bokmål

Antall sider 2

Antall sider vedlegg 1

Kontrollert av

Dato Sign

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = u(t - \pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ved hjelp av Laplace-transformasjonen.

Oppgave 2

a) Definér $f(x)$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Finn alle løsninger til den partielle differensialligningen

$$u_t + 2u = 9u_{xx} \tag{1}$$

på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2}$$

c) Finn løsningen av (1) som i tillegg til randbetingelsene (2) tilfredsstiller initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, hvor $f(x)$ er funksjonen fra **a)**.

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi bruke residyregning til å finne den Fourier-transformerte til funksjonen $f(x) = 1/(1+x^2)$. For dette formål definerer vi for hvert reelt tall w en kompleks funksjon $g_w(z)$ ved $g_w(z) = e^{-iwz}/(1+z^2)$.

a) Klassifisér de singulære punktene til $g_w(z)$, og bestem de tilhørende residyene.

b) For $R > 1$ la Γ_R^+ betegne halvsirkelbuen i øvre halvplan gitt ved $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, og la Γ_R^- betegne halvsirkelen i nedre halvplan gitt ved $z = Re^{i\theta}$, $\pi \le \theta \le 2\pi$.
Vis: For $w \le 0$ er $|g_w(z)| \le \frac{1}{R^2-1}$ når $z \in \Gamma_R^+$, og for $w \ge 0$ er $|g_w(z)| \le \frac{1}{R^2-1}$ når $z \in \Gamma_R^-$.

c) Bruk resultatene fra **a)** og **b)** til å finne den Fourier-transformerte til funksjonen $f(x) = 1/(1+x^2)$, dvs., beregn integralet

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-iwx} dx$$

ved residyregning.

[*Hint:* Betrakt tilfellene $w \ge 0$ og $w \le 0$ hver for seg.]

Oppgave 4 Gitt funksjonen

$$f(z) = e^{2/(z-1)} + e^{1/(z+1)^2} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{3!}}{z^5}.$$

a) Klassifisér de singulære punktene til $f(z)$, og bestem de tilhørende residyene.

b) Beregn integralene

$$(i) \quad \int_{|z|=1/2} f(z)\,dz \qquad (ii) \quad \int_{|z|=2} f(z)\,dz,$$

hvor generelt $\int_{|z|=R} f(z)\,dz$ betegner integralet over sirkelen med radius R og sentrum i origo, orientert mot urviseren.

Formelliste

Laplacetransformasjonen

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as} \quad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s), \qquad u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \qquad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(p)g(t-p)\,dp) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)\,d\tau) = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) \qquad \mathcal{L}(\frac{1}{t}f(t)) = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$$

Fouriertransformasjonen

$$\mathcal{F}(f(x)) = \widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\,dx, \qquad \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(w)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(w)e^{iwx}\,dw$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (iw)^n\widehat{f}(w) \qquad \mathcal{F}((-ix)^nf(x)) = \widehat{f}^{(n)}(w)$$

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x)) = \widehat{f}(w-a) \qquad \mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-iaw}\widehat{f}(w)$$

$$\mathcal{F}(\int_{-\infty}^\infty f(p)g(x-p)\,dp) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}, \qquad a \text{ reell og positiv.}$$