$f: D \to \mathbb{C}$ ANALYTISK

D... DOMENE SLIK AT $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\} \subseteq D$

$\Downarrow$

LAURENTREKKE:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

MED
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z^*)(z^* - z_0)^{n-1} dz^*$$

C SIMPEL LUKKET KURVE I D SOM OMSLUTTER z_0.

$\{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$... STØRSTE ANNULUS I D MED SENTRUM I z_0.

$\frac{1}{R_1}$... KONV.RADIUS TIL $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$

R_2... KONVRADIUS TIL $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$f: D \to \mathbb{C}$

D... DOMENE

$z_0 \in D$, SLIK AT

·) f ER IKKE ANALYTISK I z_0

·) ALLE OMEGN OM z_0 INNHOLDER PUNKTER HVOR f ER ANALYTISK.

OBS: z_0 IKKE NØDVENDIGVIS DEF I z_0.

$f(z)$ SINGULÆR I z_0

z_0... SINGULARITET

$\exists R>0$ SLIK AT $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0<|z-z_0|<R\} \to \mathbb{C}$ ANALYTISK.

z_0... ISOLERT SINGULARITET

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} \quad \text{FOR } 0<|z-z_0|<R. \quad (LR)$$

$\exists$ UENDELIG MANGE $n \in \mathbb{N}$ SLIK AT $b_n \neq 0$

z_0 ESSENSIELL SINGULARITET

$b_m \neq 0$ OG $b_n = 0 \ \forall m<n$

DVS $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{m} b_n (z-z_0)^{-n}$

z_0... POL MED ORDNING m.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

MED $g: \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0|<R\} \to \mathbb{C}$

ANALYTISK

OG $g(z_0) = b_m \neq 0$

OBS: $(z-z_0)^0 = 1$!

$f: D \to \mathbb{C}$ ANALYTISK

D… DOMENE

$z_0 \in D$ SLIK AT

$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$

MEN $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

z_0 NULLPUNKT AV ORDNING m.

$\exists R > 0$ SLIK AT

$f(z) \neq 0 \quad \forall\, 0 < |z - z_0| < R$.

z_0 POL AV ORDNING m

TIL $\frac{h(z)}{f(z)}$.

$$\frac{h(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{m} b_n (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, 0 < |z - z_0| < R.$$

$f: D \to \mathbb{C}$

D … ENKELTSAMMENHENGENDE DOMENE

$f: D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ ANALYTISK

f SINGULÆR I z_0.

$\exists R>0$ SLIK AT

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \forall\ 0<|z-z_0|<R$$

$$= \dots + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz$$

b_1 … KOEFF TIL $\frac{1}{(z-z_0)}$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \qquad \forall$$

$\leftarrow |z-z_0| = R$.

z_0 … POL AV ORDN. 1 ($b_m = 0\ \forall m \neq 1$).

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left(f(z)(z-z_0) \right)$$

z_0 … POL AV ORDN. m ($b_n = 0\ \forall n > m$).

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right) \right]$$

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. MED $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$f: D \to \mathbb{C}$

D … ENKELTSAMMENHENGENDE DOMENE

$z_1, \dots, z_k \in D$ SLIK AT

$f: D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ ANALYTISK

f SINGULÆR I $z = z_i$ $i = 1, \dots, k$.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

$\forall C$ … SIMPEL LUKKET KURVE I D OMSLUTTER $z_1, \dots, z_k$ ORIENTERT MOT URET

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; ·) $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

·) $\operatorname{grad} p(x) \leq \operatorname{grad} q(x) - 2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

POL I ØVRE HALVPLANET.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z)e^{isz})$$

$$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx = -2\pi \sum \operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f(z)e^{isz}))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx = 2\pi \sum \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(f(z)e^{isz}))$$

$(s > 0)$

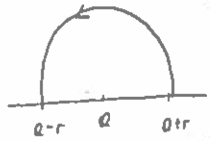
$f: D \to \mathbb{C}$

D... DOMENE

$a \in \mathbb{R}$... SIMPEL POL.

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)\,dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

C_r:



$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ MED $\text{grad}(p(x)) \leq \text{grad}(q(x)) - 2$.

$$\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z)) + \pi i \sum \operatorname{Res}(f(z))$$

POLER I DET ØVRE HALVPLANET

POLER PÅ DEN REELLE AKSEN