NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4120 Matematikk 4K**

Faglig kontakt under eksamen: Katrin Grunert[a], Espen Robstad Jakobsen[b]

Tlf:

Eksamensdato: 14. august 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = \delta(t-5), \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

der δ er deltafunksjonen.

Oppgave 2 La funksjonen f være definert ved $f(x) = \cos(x)$ for $0 < x < \pi$.

a) Finn Fourier-sinusrekken til $f(x)$.

b) Skisser summen av Fourier-sinusrekken til $f(x)$ på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.
Finn verdien til Fourier-sinusrekken til $f(x)$ i punktene $x = -\pi/4$, $x = 0$ og $x = \pi/2$.

Oppgave 3 La C være sirkelen $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ orientert mot klokka.

Finn verdien av linjeintegralet

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-7)}\, dz.$$

Oppgave 4 Vis ved hjelp av Cauchy-Riemannligningene at

$$f(z) = ze^{iz}$$

er en hel funksjon, dvs. at $f(z)$ er analytisk i hele $\mathbb{C}$.

Oppgave 5 La $R > 0$ og S_R være halvsirkelen med parametrisering

$$z(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

La $x \ge 0$ og bruk ML-ulikheten til å vise at

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{4+w^4} e^{iwx}\, dw = 0.$$

Oppgave 6

a) Finn og klassifiser de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{z^{4n} - 1}{z^{2n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Finn Laurentrekken til $f(z)$ om $z = 0$ og regn ut residyet i $z = 0$.

b) Bruk residyregning for å vise at

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin(n\theta)\, d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Oppgave 7

a) Finn alle løsninger på formen $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller den partielle differensialligningen

$$u_t(x, t) + (1 + t^2)(2u(x, t) - u_{xx}(x, t)) = 0, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad t > 0, \tag{1}$$

og randbetingelsene

$$u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

b) Finn en løsning som tilfredsstiller (1) og (2) og i tillegg initialbetingelsen

$$u(x, 0) = \sin(3x) + \sin(17x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Table of Laplace transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$