1

KONTINUASJON EKSAMEN
AUGUST 2013
LØSNINGS FORSLAG

Oppgave 1:

a) $u(x,y) = e^x \sin y + 3y$ så

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \quad \text{i } \mathbb{C}$$

i hele $\mathbb{C}$ så u er harmonisk i $\mathbb{C}$ og dermed er u realdelen til en hel funksjon $f = u + iv$, hvor

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Dermed er

$$v_y = e^x \sin y \quad \text{så}$$

$$v = -e^x \cos y + h_1(x)$$

og

$$v_x = -e^x \cos y - 3 \quad \text{så}$$

$$v = -e^x \cos y - 3x + h_2(y)$$

La $h_1(x) = -3x$ og $h_2(y) = 0$

$$v(x,y) = -e^x \cos y - 3x$$

og

$$f = e^x \sin y + 3y + i(-e^x \cos y - 3x)$$
$$= -ie^z - i3z$$

b) $u(x,y) = x^2 + y^2$ så $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \neq 0$
så u er IKKE harmonisk og dermed kan u ikke være realdelen til en analytisk funksjon.

Oppgave 2:

Vi har ligningen

$$y'' + 2y' - 3y = u(t-2)$$

og

$$y'(0) = y(0) = 0$$

La $Y = \mathcal{L}(y)$, da får vi ligningen

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 2sY - 2y(0) - 3Y = \mathcal{L}(u(t-2))$$

som gir

$$(s^2 + 2s - 3)Y = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+2s-3)}$$

$$Y = \frac{e^{-2s}}{s(s-1)(s+3)}$$

Vi skriver

$$\frac{e^{-2s}}{s(s-1)(s+3)} = e^{-2s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}\right)$$

og finner

$A = -\frac{1}{3}$

$B = \frac{1}{4}$

$C = \frac{1}{12}$

så $Y = -\frac{1}{3}\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{4}\frac{e^{-2s}}{s-1} + \frac{1}{12}\frac{e^{-2s}}{s+3}$

$$= -\frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}e^{(t-2)+2}u(t-2)$$
$$+ \frac{1}{12}e^{-3(t-2+2)}u(t-2)$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{e^2}{4}e^{(t-2)} + \frac{e^{-6}}{12}e^{-3(t-2)}\right)u(t-2)$$

Oppgave 3:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(z^2-1)\sin z}$$
$$= \frac{e^z-1}{(z-1)(z+1)\sin z}$$

a) f har singulariteter i $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ og alle punkter på formen $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2,$

Observer at $z = 0\pi = 0$ er en hevbar singularitet siden

$$f(z) = \frac{\frac{e^z-1}{z}}{(z-1)(z+1)\frac{\sin z}{z}}$$

Hvor $\frac{e^z - 1}{z}$ er begrenset når $z = 0$ og $\frac{\sin z}{z}$ går mot 1 når z nærmer seg 0.

b)

Residuen til f i de singulære punktene.

$z_1 = 1$ er en enkel pol og

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f = \frac{e^1 - 1}{(1+1)\sin 1} = \frac{e-1}{2\sin 1}$$

$z_1 = -1$ er en enkel pol

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f = \frac{e^{-1} - 1}{(-1-1)\sin(-1)} = \frac{-1 + \frac{1}{e}}{2\sin 1}$$

$z = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Observer at

$$f(z) = \frac{\frac{e^z - 1}{z^2 - 1}}{\sin z} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$z = n\pi$ er enkle poler for f og

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)}$$

$$= \frac{\frac{e^{n\pi} - 1}{(n\pi)^2 - 1}}{\cos(n\pi)} = (-1)^n \left[\frac{e^{n\pi} - 1}{(n\pi)^2 - 1}\right]$$

Oppgave 4

a) f er odde periodisk med periode 2π

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Siden f er odde så er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

hvor

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

så $b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx\right]$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\,\cancel{\sin}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{1}{n}\right)\pi\cos(nx) + \frac{1}{n}x\cos(nx) - \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$= \cancel{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\pi\right.} -$$

Når n er odde $n = 2j+1$

$$b_{2j+1} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{(2j+1)^2}(-1)^j + \frac{1}{2j+1}\pi - \frac{1}{2j+1}\pi\right]$$

$$b_{2j+1} = (-1)^j \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

Når n er et like tall $n = 2k$

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2k}\frac{\pi}{2}(-1)^k - \frac{1}{2k}\pi + \frac{1}{2k}\pi + \frac{1}{2k}\pi(-1)^k - \frac{1}{2k}\frac{\pi}{2}(-1)^k\right]$$

$$= 0$$

så

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi}(-1)^j \frac{1}{(2j+1)^2} \sin((2j+1)x)$$

b)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\pi, t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Vi finner løsninger av lynen

$$u_n = F_n(x)\, G_n(t)$$

Hvor

$$\dot{G}_n + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{og} \quad \lambda_n = \sqrt{5}\, n$$

og

$$\ddot{F}_n + n^2 F = 0$$

Vi løser og får

$$G_n = e^{-\lambda_n^2 t}$$

eller

$$G_n(t) = e^{-5n^2 t}$$

og

$$F_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$$

Vi får løsningen på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-5n^2 t} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

$u(0,t) = 0$ og $u(\pi, t) = 0$

gir at $A_n = 0$ for alle n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n^2 t} B_n \sin(nx)$$

Siden

$u(x,0) = f(x)$ følger

det at

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = f(x)$$

så $B_n = 0$ når n er liketall

Og $B_{2j+1} = \frac{4}{\pi}(-1)^j \frac{1}{(2j+1)^2}$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}(-1)^j \frac{1}{(2j+1)^2} e^{-5(2j+1)^2 t} \sin((2j+1)x)$$

Oppgave 5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$$

STEG 1: Undersøker om integralet konvergerer. Med andre ord om

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x+3}{x^4+1}\,dx \quad \text{og}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x+3}{x^4+1}\,dx \quad \text{eksisterer.}$$

Først

$$\int_0^b \frac{x+3}{x^4+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+3}{x^4+1}\,dx + \int_1^b \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$$

Problemet er om

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{x+3}{x^4+1}\,dx \quad \text{eksisterer.}$$

Når $x > 0$ så er $\left|\frac{x+3}{x^4+1}\right| \leq \frac{x+3}{x^4}$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} \quad \text{og}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) dx \quad \text{eksisterer så}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{x+3}{x^4+1}\,dx \quad \text{eksisterer.}$$

Tilsvarende for $\int_{-\infty}^{0} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$

$$\int_{a}^{0} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx + \int_{a}^{-1} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$$

og

$$\left|\frac{x+3}{x^4+1}\right| \leq \frac{|x|+3}{x^4} = -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} \text{ også}$$

$x < 0$ og

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) dx \text{ eksisterer så}$$

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \left|\frac{x+3}{x^4+1}\right| dx \text{ eksisterer og}$$

derfor eksisterer $\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$

STEG 2

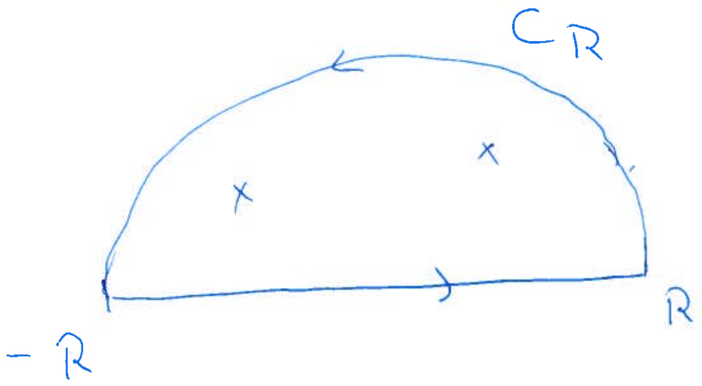
Nå ser vi at $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx =$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$$

La $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ hvor

C_R er gitt ved $z(t) = Re^{it}$

$0 \le t \le \pi$



Når R er stor så

er
$$\int_{\Gamma_R} \frac{z+3}{z^4+1}\, dz = 2\pi i \sum_{z_j} \mathrm{Res} \frac{z+3}{z^4+1}$$

z_j er i det øvre halvplan.

z_j er singularitetene til $\frac{z+3}{z^4+1}$ i det øvre halvplan.

Observer at

$$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$z^4 = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

Så vi får røttene

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\pi\right)} = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Bare z_0 og z_1 ligger i det øvre halvplan. Så

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z+3}{z^4+1}\,dz = \int_{\Gamma_R} \frac{z+3}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\,dz$$

$$= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f\right]$$

Både z_0 og z_1 er enkle poler for f så

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f = \frac{z_0+3}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} =$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2i}\;\frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f = \frac{z_1+3}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{(-\sqrt{2})\,(i\sqrt{2})\,(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2i}\;\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

så

$$2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_0} f + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f\right] =$$

$$\frac{2\pi i}{2i}\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} + \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{4}\right.$$

$$\left. + \frac{(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{4}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{2 + 3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{4} + \frac{-2 + 3(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{4}\right]$$

$$= \pi\,\frac{6\sqrt{2}}{4} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi}}$$

Om R er stor så er

$$\int_{\Gamma_R} \frac{z+3}{z^4+1}\,dz = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$$

STEG 3:

Vi vil vise at $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z+3}{z^4+1}\,dz = 0$

Når $z \in C_R$ så er $|z| = R$

og $$\left|\frac{z+3}{z^4+1}\right| \leq \frac{|z|+3}{|z|^4-1} = \frac{R+3}{R^4-1}$$

så $$\left|\int_{C_R} \frac{z+3}{z^4+1}\,dz\right| \leq \frac{R+3}{R^4-1}\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Fra dette får vi:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z+3}{z^4+1}\,dz = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{x^4+1}\,dx$$