NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4120 Matematikk 4K
5. desember 2013

Løsningsforslag

1 Vi bruker formelen $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))$ med $f'(t)$ og $f''(t)$ i stedet for $f(t)$, og får

$$\mathcal{L}(tf'(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f'(t)) = -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = -F(s) - sF'(s)$$
$$\mathcal{L}(tf''(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f''(t)) = -\frac{d}{ds}(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)) = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)\,.$$

Bruker så dette på initialverdiproblemet $ty'' + 2y' - ty = 1$, $y(0) = 1$:

$$-2sY(s) - s^2Y'(s) + 1 + 2(sY(s) - 1) + Y'(s) = -(s^2-1)Y'(s) - 1 = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$
$$\implies \quad -(s^2-1)Y'(s) - 1 = \frac{1}{s}, \quad \text{dvs.} \quad Y'(s) = -\frac{s+1}{s(s^2-1)} = -\frac{1}{s(s-1)}\,.$$

Siden $Y'(s) = \mathcal{L}(-ty(t))$, gir dette at $\mathcal{L}(-ty(t)) = -\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(1 - e^t)$, så $-ty(t) = 1 - e^t$, dvs.

$$y(t) = \frac{e^t - 1}{t}\,.$$

2 **a)**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1 \cdot \cos nx\, dx = \frac{2}{n\pi}[\sin nx]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin((2k-1)\pi/2)}{2k-1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Så Fourier-cosinusrekken blir

$$1/2 + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos((2k-1)x)\,.$$

b) $u(x,t) = X(x)T(t)$ gir $X\dot{T} + XT = X''T$. Divisjon med XT gir $\frac{\dot{T}}{T} + 1 = \frac{X''}{X} = k$, hvor k er en konstant. For X gir dette $X'' - kX = 0$ og $X'(0) = X'(\pi) = 0$.
Hvis $\underline{k = p^2 > 0}$, får vi $X = A\cosh px + B\sinh px$, $X' = pA\sinh px + pB\cosh px$. $X'(0) = pB\cosh 0 = 0$ gir $B = 0$ (siden $p \neq 0$), $X'(\pi) = pA\sinh p\pi = 0$ gir $A = 0$ (siden $\sinh p\pi \neq 0$). Så $A = B = 0$, dvs., vi får <u>bare null-løsningen</u>.
$\underline{k = 0}$ gir $X = A + Bx$, som sammen med randbetingelsene gir $\underline{X = A = \text{en konstant}}$.
$\underline{k = -p^2 < 0}$ gir $X = A\cos px + B\sin px$, $X' = -pA\sin px + pB\cos px$. $X'(0) = pB = 0$ gir $B = 0$, $X'(\pi) = pA\sin p\pi = 0$ gir $p = n = 1, 2, 3, \dots$. Så for $k < 0$ har vi følgende muligheter for X: $\underline{X_n(x) = A_n\cos nx,\ n = 1, 2, 3, \dots}$. Disse kan slås sammen med tilfellet $k = 0$ til $\underline{X_n(x) = A_n\cos nx,\ n = 0, 1, 2, 3, \dots}$.

Så $k = -n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ er de eneste verdiene av separasjonskonstanten k som gir ikke-trivielle løsninger.
For T gir dette: $\frac{\dot{T}}{T} + 1 = k = -n^2$, dvs., $\frac{\dot{T}}{T} = -(n^2+1)$, som gir $T = e^{-(n^2+1)t}$ (trenger ingen konstant foran $e^{-(n^2+1)t}$ siden den blir absorbert av konstanten foran $\cos nx$). Dermed har vi at alle løsninger av differensialligningen (1) og randbetingelsene (2) på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ er gitt ved

$$u_n(x,t) = A_n \cos nx \cdot e^{-(n^2+1)t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

c) Vi søker en løsning på formen $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx \cdot e^{-(n^2+1)t}$ som i tillegg til (1) og (2) også oppfyller initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, hvor $f(x)$ er funksjonen fra a). Vi får $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = f(x)$, og det betyr at $A_n = a_n$, hvor a_n er koeffisientene funnet i a), dvs., $A_0 = 1/2$, $A_{2k} = 0$, $A_{2k-1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Så den søkte løsningen blir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(x,t) \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos(2k-1)x \cdot e^{-((2k-1)^2+1)t} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos(2k-1)x \cdot e^{-(2k-1)^2 t}\right) e^{-t}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)**

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+iw)x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1-iw}e^{(1-iw)x}\right]_{x=-\infty}^{x=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-1}{1+iw}e^{-(1+iw)x}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{g}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(\cos wx + i\sin wx)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}\cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{w}\sin wx\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $\cos wx$ (resp. $\sin wx$) er en like (resp. odde) funksjon av x.

b)

$$\begin{aligned} h(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-p)g(p)\, dp = \int_{-1}^{1} f(-p) = 2\int_{0}^{1} f(p) = 2\int_{0}^{1} e^{-p}dp \\ &= 2(1-e^{-1}) = 2\cdot\frac{e-1}{e}, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at $f(p) = e^{-|p|}$ er en like funksjon av p.
Siden $h = f * g$, følger at $\mathcal{F}(h) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$. Bruk av invers Fourier-transform på begge sider gir $h = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}\cdot\widehat{g}\right)$, dvs.,

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)e^{iwx}dw = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)e^{iwx}dw\,,$$

som for $x = 0$ gir

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\widehat{g}(w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}dw\,.$$

Fra konvolusjonsformelen har vi $h(0) = 2\cdot\frac{e-1}{e}$, og alt dette gir til sammen:

$$2\cdot\frac{e-1}{e} = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}dw$$

dvs.,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw = \frac{\pi}{e}(e-1)\,.$$

4 Via identiteten $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ og substitusjonen $z = e^{i\theta}$ får vi:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\,d\theta = \int_C\frac{1}{2+\frac{1}{2i}(z-1/z)}\frac{dz}{iz} = \int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}\,dz$$

hvor C er enhetssirkelen gjennomløpt én gang mot urviseren. Sett $f(z) = \frac{2}{z^2+4iz-1}$. Nevneren $z^2 + 4iz - 1$ har første ordens nullpunkter i $z = z_1 = (-2+\sqrt{3})i$ og $z = z_2 = -(2+\sqrt{3})i$, så $f(z)$ har første ordens poler i disse punktene. Bare z_1 ligger innenfor enhetssirkelen. Vi skriver $f(z)$ på formen $f(z) = \frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}$ og beregner residyet i z_1: $\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}((z-z_1)f(z)) = \frac{2}{z_1-z_2} = \frac{2}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$, så

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}\,d\theta = \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i\frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}\,.$$

Residyet kan også beregnes slik: $\mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2}{\frac{d}{dz}(z^2+4iz-1)|_{z=z_1}} = \frac{2}{(2z+4i)|_{z=z_1}} = \frac{2}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}i}$.

5 **a)** Mulige singulære punkter er der hvor nevner er lik 0, nemlig $z = 0$ og $z = \pi/4$. Punktet $z = 0$ er imidlertid en hevbar singularitet fordi

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos^2 z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z^2} = (\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z})^2 = (\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{1})^2 = 1$$

ved L'Hôpitals regel, så uttrykket $\frac{1-\cos^2 z}{z^2}$ blir analytisk i 0 dersom vi gir det verdien 1 der. Alternativt kunne vi brukt Maclaurin-rekken til $\sin z$:

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos^2 z}{z^2} = \frac{\sin^2 z}{z^2} &= \frac{(z - z^3/3! + z^5/5! - \cdots)^2}{z^2} = \frac{z^2(1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)^2}{z^2}\\ &= (1 - z^2/3! + z^4/5! - \cdots)^2\end{aligned}$$

og kommet til samme resultat.
$z = \pi/4$ er et enkelt nullpunkt for nevneren til $f(z)$, og siden telleren er forskjellig fra 0 der, er $z = \pi/4$ en enkel pol for $f(z)$.
Oppsummert: $z = 0$ er en hevbar singularitet. $z = \pi/4$ er en enkel pol.

b) Polen $z = \pi/4$ ligger innenfor enhetssirkelen. Vi beregner residyet:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/4} f(z) = \lim_{z\to\pi/4}((z-\pi/4)f(z)) = \left.\frac{1-\cos^2 z}{z^2\cdot 4}\right|_{z=\pi/4} = \frac{1-1/2}{(\pi/4)^2\cdot 4} = \frac{2}{\pi^2}\,.$$

Alternativt:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/4} f(z) = \left.\frac{1-\cos^2 z}{\frac{d}{dz}(z^2(4z-\pi))}\right|_{z=\pi/4} = \frac{1-1/2}{(12z^2-2\pi z)|_{z=\pi/4}} = \frac{1/2}{12\pi^2/16-2\pi\cdot\pi/4} = \frac{2}{\pi^2}\,.$$

Dette gir:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=\pi/4} f(z)) = 2\pi i\frac{2}{\pi^2} = \frac{4i}{\pi}\,.$$