Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i

TMA4120/MA2105 Matematikk 4K/Kompleks funksjonsteori med differensiallikninger

Faglig kontakt under eksamen: Trond Digernes, Berit Stensønes

Tlf: 926 63 816 (Digernes), 968 54 060 (Stensønes)

Eksamensdato: 5. desember 2013

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C.

1 A4-ark med håndskrevne notater.

Bestemt, enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR-270X eller Citizen SR-270X College).

Rottmann: Matematisk formelsamling.

Annen informasjon:

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Vis at

$$\mathcal{L}\{tf'(t)\} = -F(s) - sF'(s), \quad \mathcal{L}\{tf''(t)\} = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)$$

hvor $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
La $y(t)$ være løsningen av differensialligningen

$$ty'' + 2y' - ty = 1$$

som oppfyller $y(0) = 1$, og la $Y(s)$ være den Laplacetransformerte til $y(t)$.
Vis at $Y'(s) = -\dfrac{1}{s(s-1)}$, og finn $y(t)$.
(Kommentar: På grunn av differensialligningens form trenger vi bare én initialbetingelse.)

Oppgave 2

a) Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Finn Fourier-cosinusrekken til $f(x)$.

b) Finn alle løsninger av den partielle differensialligningen

$$u_t + u = u_{xx} \tag{1}$$

på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

c) Finn løsningen av (1) som i tillegg til randbetingelsene (2) også tilfredsstiller initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$, hvor $f(x)$ er funksjonen fra **a)**.

Oppgave 3 Funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er definert ved

$$f(x) = e^{-|x|} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Vis at de Fourier-transformerte av $f(x)$ og $g(x)$ er gitt ved

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2} \qquad \text{og} \qquad \widehat{g}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$

b) La $h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)\,dp$ være konvolusjonen av f og g. Bestem $h(0)$.
Gjør rede for at

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+w^2} \frac{\sin w}{w} e^{iwx}\,dw,$$

og bestem verdien av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{w(1+w^2)}\,dw.$$

Oppgave 4 Beregn det trigonometriske integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\,d\theta$$

ved residyregning.

Oppgave 5

a) Finn og klassifisér de singulære punktene til funksjonen

$$f(z) = \frac{1-\cos^2 z}{z^2(4z-\pi)}.$$

b) Beregn integralet

$$\int_C f(z)\,dz$$

der C er enhetssirkelen med sentrum i origo, gjennomløpt én gang mot urviseren.

Formelliste

Laplacetransformasjonen

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^s+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as} \quad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s), \qquad u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \qquad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(p)g(t-p)\,dp) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot \mathcal{L}(g(t))$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)\,d\tau) = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) \qquad \mathcal{L}(\frac{1}{t}f(t)) = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$$

Fouriertransformasjonen

$$\mathcal{F}(f(x)) = \widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\,dx, \qquad \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(w)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(w)e^{iwx}\,dw$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (iw)^n\widehat{f}(w) \qquad \mathcal{F}((-ix)^nf(x)) = \widehat{f}^{(n)}(w)$$

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x)) = \widehat{f}(w-a) \qquad \mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-iaw}\widehat{f}(w)$$

$$\mathcal{F}(\int_{-\infty}^\infty f(p)g(x-p)\,dp) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}, \qquad a \text{ reell og positiv.}$$