KONT 4K – 2010

oppg. 1

$$\left| \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} \right| = \frac{|3+4i|\cdot|-1+2i|}{|-1-i|\cdot|3-i|} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\,\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

oppg. 2

$$y'(t) + 100\int_0^t y(\tau)\,d\tau = u(t-2), \quad y(0)=0$$

Ta Laplace av hver side, skriv $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0} + 100\,\frac{1}{s}\,Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} \quad \text{gir} \quad Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+100}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+100}\right) = \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s^2+10^2}\right) = \frac{1}{10}\sin(10t)$$

Så en av forskyvningssetningene gir oss

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s^2+10^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{10}\sin\big(10(t-2)\big)\,u(t-2)}}$$

oppg. 3

$$(*)\quad u_t + u = u_{xx} \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0$$

Vi ser etter løsninger på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$

$u_t = X\dot{T}$ og $u_{xx} = X''T$

$u \equiv 0$ er en løsning (den trivielle løsningen)

Anta $u \neq 0$, ~~og~~ Da får vi, ved å dele på u i $(*)$,

$$\frac{X\dot{T}}{XT} + \frac{XT}{XT} = \frac{X''T}{XT} \quad \text{eller} \quad \frac{\dot{T}}{T} + 1 = \frac{X''}{X}$$

venstre side er bare avhengig av t, mens høyre side bare av x, så begge må være konstant, si k.

Se først på $\frac{X''}{X} = k$.

Vi ser etter andre løsninger enn den trivielle:

$\underline{k=0?}$ $\quad X''=0$, $X_0(x)=A_0x+B_0$

$u(0,t)=B_0T(t)=0$, så $\underline{B_0=0}$

(hvis $T(t)\equiv 0$ får vi bare den trivielle løsningen)

Så $u(\pi,t)=A_0\pi T(t)$, så $A_0=0$

$k=0$ gir altså kun den trivielle løsningen.

$\underline{k>0?}$ $\quad X(x)=ae^{-\sqrt{k}x}+be^{\sqrt{k}x}$

$u(0,t)=aT+bT=(a+b)T=0$ så $a=-b$

så $u(\pi,t)=ae^{-\sqrt{k}\pi}T-ae^{\sqrt{k}\pi}T=aT(e^{-\sqrt{k}\pi}-e^{\sqrt{k}\pi})$,

så $a=0$, så igjen kun den trivielle løsningen

$\underline{k<0}$ $\quad$ Kan skrive $k=-p^2$

$X(x)=A\cos(px)+B\sin(px)$

$u(0,t)=AT(t)=0$ så $A=0$

$u(\pi,t)=B\sin(p\pi)T(t)=0$

$B=0$ gir den trivielle løsningen.

$B\neq 0$ gir $\sin(p\pi)=0$, så p må være et heltall $\neq 0$. $\sin(-pt)=-\sin(pt)$, så holder å se på positive heltall: $p=1,2,3,\ldots$

$X_p(x)=\underline{B_p\sin(px)}.$

For slik p, se på $\dfrac{\dot T}{T}+1=-p^2$ $\quad p=1,2,3,\ldots$

$\dot T_p=-(1+p^2)T_p$ så $T_p(t)=\underline{C_pe^{-(1+p^2)t}}$

C_p kan svelges i B_p, så mulige løsninger på formen $u=XT$ er

$$\underline{u_p(x,t)=B_p\sin(px)e^{-(1+p^2)t}} \qquad p=1,2,3,\ldots$$

(den trivielle løsningen er kommet med, ta $B_p=0$)

Superposisjoneringsprinsippel gir oss at lineære kombinasjoner av disse også er løsninger:

$$u(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin(px)\, e^{-(1+p^2)t}$$

Bruker vi initialbetingelsen får vi

$$u(x,0) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p \sin(px) = 100 \sin(3x)$$

Entydighet av Fourierrekker gir oss nå $B_p = \begin{cases} 100 & p=3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

slik at løsningen på problemet er

$$\underline{\underline{u(x,t) = 100 \sin(3x)\, e^{-10t}}}$$

<u>oppg 4</u> $f = u + iv$ $\quad (*)\ |f|^2 = u^2+v^2 = C^2$

Hvis $C = 0$ er det opplagt at $f=0$, så konstant.

Se på $C^2 > 0$. Derivasjon av $(*)$ m.h.p. x gir

———— " ———— y gir

$$(**)\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases}$$

f er analytisk, så vi har Cauchy-Riemann ligningene $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$. Disse inn i $(**)$ gir f.eks.

$$\begin{aligned} uu_x - vu_y &= 0 \\ vu_x + uu_y &= 0 \end{aligned}$$ eller på matriseform $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determinanten $\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2+v^2 = C^2$. Vi har antatt $C^2 \neq 0$, så $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er eneste løsning.

Så u må være konstant (Ω er sammenhengende)

Tilsvarende får vi at v må være konstant

(se på $uv_y + vv_x = 0$ & $-uv_x + vv_y = vv_y - uv_x = 0$)

så $f = u + iv$ må være konstant.

Oppg 5a. Sett $f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2+100} = \frac{e^{3iz}}{(z+10i)(z-10i)}$, enkel pol i $z_1 = -10i$ & $z_2 = 10i$

Når $R > 10$ ligger nøyaktig en pol, $z_2 = 10i$, innenfor kurven C_R. Residy-setningen gir

$$\int_{C_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+100}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=10i} f(z) = 2\pi i \left[\frac{e^{3iz}}{(z^2+100)'}\Big|_{z=10i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^{-30}}{20i} \right] = \underline{\underline{\frac{\pi e^{-30}}{10}}}$$

Oppg 5b. ML ulikheten gir $\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+100}\,dz \right| \le M_R L_R$ der $L_R = \pi R$ er lengden til Γ_R og M_R er slik at $|f(z)| \le M_R$ når z er på Γ_R. Skriv $z = x+iy$ og se på $R > 10$. Da har vi $|f(z)| = \left| \frac{e^{3iz}}{z^2+100} \right|$

$$= \frac{|e^{3ix}|\,e^{-3y}}{|z^2+100|} \le \frac{1 \cdot e^{-3y}}{|z|^2-100}.$$

På Γ_R har vi $y \ge 0$ og $|z| = R$, så kan ta $M_R = \frac{1}{R^2-100}$

Så $\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+100}\,dz \right| \le \pi R \frac{1}{R^2-100} = \frac{\pi}{R - \frac{100}{R}}$ som går mot 0 når $R \to \infty$.

Oppg 5c. Se på $R > 10$.

$$\underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+100}\,dz}_{= \frac{\pi e^{-30}}{10} \text{ (reell)}} = \int_{\Gamma_R} \cdots + \int_{[-R,R]} \cdots = \underbrace{\int_{\Gamma_R} \frac{e^{3iz}}{z^2+100}\,dz}_{\text{går mot null når } R\to\infty} + \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\cos 3x}{x^2+100}\,dx}_{\text{reell}} + \underbrace{i\int_{-R}^{R} \frac{\sin 3x}{x^2+100}\,dx}_{\text{imaginær. så må være null i grensen}}$$

Så $\text{pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+100}\,dx = \frac{\pi e^{-30}}{10}$

x^2+100 ingen nullpunkt på $\mathbb{R}$, $|\cos 3x| \le 1$ $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+100} \le \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2}$ som eksisterer. Tilsvarende for $\int_0^\infty$, så dermed vet vi at $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+100}\,dx = \text{pr.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots = \underline{\underline{\frac{\pi e^{-30}}{10}}}$