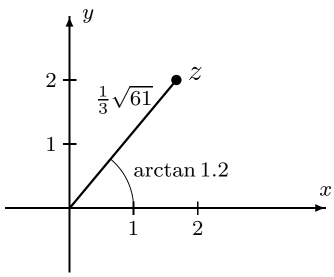
Fra Kreyszig, avsnitt 13.2

7 Vi skal skrive det komplekse tallet $z = (-6+5\mathrm{i})/3\mathrm{i}$ på polarform $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Først eliminerer vi den komplekse nevneren:



$$z = \frac{-6+5\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} = \frac{(-6+5\mathrm{i})\mathrm{i}}{3\mathrm{i}^2} = \frac{-6\mathrm{i}-5}{-3} = \frac{5}{3} + 2\mathrm{i}.$$

Vi får

$$r = \sqrt{\left(\tfrac{5}{3}\right)^2 + 2^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{61} \quad \text{og} \qquad \tan\theta = \tfrac{2}{5/3} = \tfrac{6}{5}.$$

z ligger i 1. kvadrant, så $\theta = \arctan\frac{6}{5} \approx 0.88$.

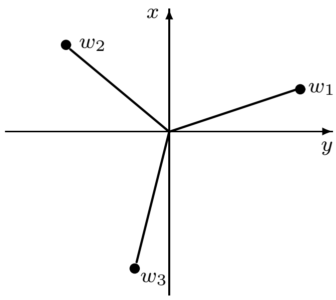
Dermed blir $z = \frac{1}{3}\sqrt{61}\left(\cos(\arctan\frac{6}{5}) + \mathrm{i}\sin(\arctan\frac{6}{5})\right)$.

24 Vi skal finne alle tredjerøttene av tallet $3+4i$. La $z = 3+4i$. Da er $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ og $\tan\theta = \frac{4}{3}$, altså $\theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93$ (siden z ligger i 1. kvadrant). La $w^3 = z$ med $w = Re^{i\phi}$. Da er $R^3 = r$, det vil si $R = r^{1/3} = 5^{1/3}$, og $3\phi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, slik at ϕ har verdiene

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{3}\arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}31 \\
\phi_1 &= \phi_0 + \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}\Big(\arctan\frac{4}{3} + 2\pi\Big) \approx 2{,}40 \\
\phi_2 &= \phi_0 + \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{3}\Big(\arctan\frac{4}{3} + 4\pi\Big) \approx 4{,}50.
\end{aligned}$$

Følgelig har w (de eksakte) verdiene

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{5}\, e^{i(\arctan\frac{4}{3})/3} \\
w_1 &= \sqrt[3]{5}\, e^{i(2\pi+\arctan\frac{4}{3})/3} \\
w_2 &= \sqrt[3]{5}\, e^{i(4\pi+\arctan\frac{4}{3})/3}.
\end{aligned}$$



På formen $x+iy$, med x og y avrundet til fire desimaler, blir svaret

$$w_0 = 1{,}6289 + 0{,}5202i, \quad w_1 = -1{,}2650 + 1{,}1506i, \quad w_2 = -0{,}3640 - 1{,}6708i.$$

30

$$z^4 = -16 = 16e^{i\pi + 2k\pi i}$$

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt[4]{16}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \\
&= 2e^{i(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}
\end{aligned}$$

hvor $k = 0, 1, 2, 3$ gir de forskjellige løsningene

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} &&= \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_2 &= 2e^{i\frac{3\pi}{4}} &&= -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_3 &= 2e^{i\frac{5\pi}{4}} &&= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ z_4 &= 2e^{i\frac{7\pi}{4}} &&= \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Generelt kan et komplekst polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ av grad n skrives

$$p(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

hvor $z_1 \cdots z_n$ er de komplekse røttene til polynomet. ($z_1 \cdots z_n$ er ikke nødvendigvis alle forskjellige.)

Fra beregningen over ser vi at

$$z^4 + 16 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

Studerer vi løsningene nærmere, ser vi at $z_3 = \bar{z_2}$ og $z_4 = \bar{z_1}$. Samler vi leddene som svarer til komplekskonjugerte par av røtter, får vi

$$\begin{aligned} z^4 + 16 &= (z - z_1)(z - \bar{z_1})(z - z_2)(z - \bar{z_2}) \\ &= (z - (z_1 + \bar{z_1})z + z_1\bar{z_1})(z - (z_2 + \bar{z_2})z + z_2\bar{z_2}) \\ &= (z^2 - (2\mathrm{Re}z_1)z + |z_1|^2)(z^2 - (2\mathrm{Re}z_2)z + |z_2|^2) \\ &= (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) \end{aligned}$$

Denne oppgaven er et eksempel på et mer generelt resultat.

For et polynom med *reelle* koeffisenter $a_0, \cdots, a_n$ har vi at hvis et komplekst tall w er en rot, er også $\bar{w}$ det. (Dette kan man se lett ved å komplekskonjugere ligninga $p(w) = 0$.) Hvis w ikke er reelt, er $(z - w)$ og $(z - \bar{w})$ forskjellige faktorer i polynomet.

Observer at $(z - w)(z - \bar{w}) = z^2 - (w + \bar{w}z + w\bar{w} = z^2 - (2\mathrm{Re}w)z + |w|^2$ er et andregradspolynom med *reelle* koeffisienter.

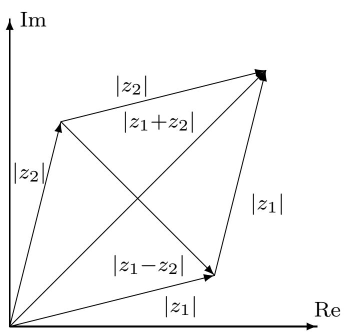
Fra de foregående linjene kan man slutte at ethvert polynom $p(x)$ med reelle koeffisienter kan faktoriseres til lineære faktorer på formen $x - w$ so svarer til reelle røtter w av polynomet og kvadratiske faktorer på formen $x^2 - (2\mathrm{Re}w)x + |w|^2$ som svarer til komplekskonjugerte par av ikke-reelle røtter av polynomet.

33 Vi skal vise *parallellogramlikheten* $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Vi har at

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2. \end{aligned}$$

For å forklare navnet på likheten ser vi for oss et parallellogram utspent av vektorene z_1 og z_2. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ representerer summen av kvadratene av lengdene av den korte diagonalen $|z_1 - z_2|$ og den lange diagonalen $|z_1 + z_2|$. Summen av kvadratene av sidene i parallellogrammet er $2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Vi har vist at disse uttrykkene er like store. Derav navnet *parallellogramlikheten*.



Alternativt: Vi kunne også ha vist *parallellogramlikheten* slik

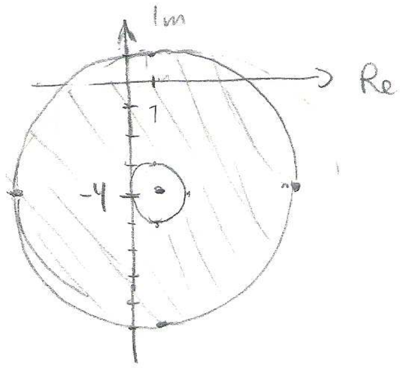
$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\
&= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 \\
&\quad + x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2 \\
&= 2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2) \\
2(|z_1|^2+|z_2|^2) &= 2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2).
\end{aligned}$$

Fra Kreyszig, avsnitt 13.3

$\boxed{2}$ Vi skriver ulikhetene på formen

$$1 \leq |z-(1-4i)| \leq 5$$

og ser at området er en lukket annulus med sentrum $(1-4i)$, indre radius 1 og yttre radius 5.



[Kvadrer $\rightarrow 1^2 \leq (x-1)^2+(y+4)^2 \leq 5^2$]

$\boxed{15}$

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^2} &= \frac{1}{x^2-y^2+2ixy} \\
&= \frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \\
&= \frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2)}
\end{aligned}$$

så vi ser at

$$\mathrm{Re}\ f = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\mathrm{Im}\ f = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Evaluert for $z = 1+i$ får vi

$$\mathrm{Re}\ f(1+i) = 0$$

$$\mathrm{Im}\ f = -\frac{1}{2}$$

.

21 Kjerneregelen gir at

$$\begin{aligned}((z^3+i)^2)' &= 2(z^3+i)(z^3+i)' = 2(z^3+i)3z^2 \\ &= 6z^2(z^3+i)\end{aligned}$$

26f Vi skal vise at $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ikke er deriverbar.

Funksjonen er deriverbar i z_0 hvis

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z}$$

eksisterer. Skriver $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$$\begin{aligned}&\frac{(x_0+\Delta x)^2 + (y_0+\Delta y)^2 - (x_0^2+y_0^2)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

Hvis $\Delta y = 0$, blir grensen når $\Delta x \to 0$ lik $2x_0$, hvis $\Delta x = 0$, blir grensen $-2iy_0$. Disse er bare like dersom $x_0 = y_0 = 0$. Så funksjonen er ikke deriverbar for $z_0 \neq 0$.

(Vi har ikke med dette vist at funksjonen *er* deriverbar i 0. For at denskal være det, må grensen være den samme uansett hvordan Δz går mot null. Vi har bare sjekket retningene parallellt med aksene.)

For $z_0 = 0$ blir grensen

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \Delta x - i\Delta y = 0\end{aligned}$$

Så funksjonen $f(z) = |z|^2$ er deriverbar i 0, og bare der.

Fra Kreyszig, avsnitt 13.4

7 Her er

$$f(z) = \mathrm{Re} z + \mathrm{Im} z = u(x,y) + iv(x,y)$$

med

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \mathrm{Re} z + \mathrm{Im} z = x + y \\ v(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

Caucy-Riemann ligningene holder ikke,

$$\begin{aligned}u_x &= 1 \neq 0 = v_y \\ u_y &= 1 \neq 0 = -v_x\end{aligned}$$

så $f(z)$ er ikke analytisk.

10 Siden

$$
\begin{aligned}
z^2 &= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \\
\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}^2} = \frac{(x-iy)^2}{|z|^4} = \frac{x^2-y^2-i2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

er

$$
f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2} = u(x,y) + iv(x,y)
$$

med

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= x^2 - y^2 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
v(x,y) &= 2xy - \frac{2xy}{x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x + \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} - 4x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3} \\
u_y &= -2y - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - 4y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3} \\
v_x &= 2y - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= 2y + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-4y(x^2+y^2)+8x^2y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= -u_y \\
v_y &= 2x - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8y^2x}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \ldots = -u_x
\end{aligned}
$$

Cauchy-Riemann ligningen holder bortsett fra i $z = 0$ $(x = y = 0)$ og de partiellderiverte til u og v er kontinuerlige for $z \neq 0$, dermed er $f(z)$ analytisk for alle $z \neq 0$.