

# TMA4115 Matematikk 3

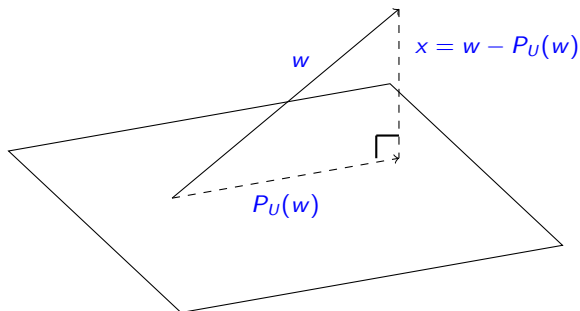
Uke 9, V2025

## Projeksjoner II

Institutt for matematiske fag  
NTNU, Trondheim

Februar 25, 2025

## Sammendrag Uke 8 (Projeksjoner I)

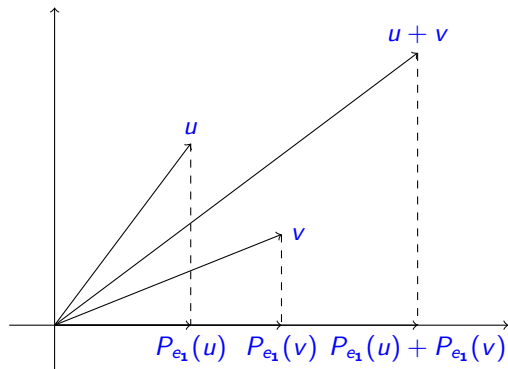


*Projisere en vektor ned på et plan.*

Den ortogonale projeksjonen på en vektor  $v$  er en lineærtransformasjon:

$$P_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$P_v(w) = \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v,$$

## Sammendrag Uke 8 (Projeksjoner I)



Skalarproduktet, eller prikkproduktet:  $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  er lengden til  $v$  og  $\|w\|$  er lengden til  $w$  og  $\theta$  er vinkelen mellom  $v$  og  $w$ , To vektorer er ortogonale hvis  $v \cdot w = 0$ , og parallelle (altså  $\cos \theta = \pm 1$ ) hvis  $v \cdot w = \pm \|v\| \|w\|$ .

## Sammendrag Uke 8 (Projeksjoner I)

**Eks.:**  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  og  $w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$  er ikke ortogonale fordi  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = 6$ .

$$P_v(w) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at  $P_v(w)$  og  $v$  er parallelle siden  $P_v(w) = 2v$ , og at  $P_v(w)$  og  $w - P_v(w)$  er ortogonale, fordi:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0.$$

$$w = P_v(w) + (w - P_v(w))$$

## Sammendrag Uke 8 (Projeksjoner I)

La  $V$  være et reelt vektorrom. Et indreprodukt i  $V$  er en operasjon som tar inn to vektorer,  $v$  og  $w$ , for å gi ut et reelt tall  $\langle v, w \rangle$ .

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad (\text{symmetri})$$

$$\langle (\alpha w + \beta u), v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle + \beta \langle u, v \rangle \quad (\text{linearitet})$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \text{ og } \langle v, v \rangle = 0 \text{ kun hvis } v = 0 \quad (\text{positivitet})$$

Vi sier at  $V$ , sammen med et valgt indreprodukt, er et indreproduktrom.

Hvis du kombinerer linearitet og symmetri, får du også at indreproduktet er lineært i første faktor:

$$\langle v, (\alpha w + \beta u) \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v, u \rangle.$$

Men hvis vi antar et vektorrom over de komplekse tallene,  $\mathbb{C}$ , har vi følgende regler  $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$  (konjugert symmetri):

$$\langle v, (\alpha w + \beta u) \rangle = \overline{\langle (\alpha w + \beta u), v \rangle} = \bar{\alpha} \langle v, w \rangle + \bar{\beta} \langle v, u \rangle$$

## Sammendrag Uke 8 (Projeksjoner I)

La  $V$  være et indreproduktrom. Den ortogonale projeksjonen på en vektor  $v \neq 0$  er en lineærtransformasjon:

$$P_v: V \rightarrow V$$
$$P_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Koordinatene til  $v$  i en ortogonal basis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  er

$$v = P_{u_1}(v) + P_{u_2}(v) + \dots + P_{u_n}(v)$$
$$= \frac{\langle u_1, v \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle u_2, v \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle u_n, v \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n.$$

La  $u_1, u_2, \dots, u_m$  være en ortogonal basis for  $U$ , et underrom av  $V$

$$P_U(v) = P_{u_1}(v) + P_{u_2}(v) + \dots + P_{u_m}(v)$$
$$= \frac{\langle u_1, v \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle u_2, v \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle u_m, v \rangle}{\langle u_m, u_m \rangle} u_m$$

## Sammendrag Prosjeksjoner II (Uke 9)

### Finne en ortogonal basis: Gram–Schmidt (GS) metode

La  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  være en lineært uavhengig vektormengde. Vi skal lage oss en ortogonal basis  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  for rommet utspent av vektorene i mengden.

1.

$$u_1 = v_1$$

2.

$$u_2 = v_2 - P_{u_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

3.

$$u_3 = v_3 - P_{u_1}(v_3) - P_{u_2}(v_3) = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

k.

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{u_j}(v_k) = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j, v_k \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j.$$

## Sammendrag Projeksjoner II (Uke 9)

Mengden  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  er en ortogonal basis for  $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

La  $U$  være et underrom til et indreproduktrom  $V$ . Her er en metode for å regne ut den ortogonale projeksjonen  $P_U$ :

1. Ta utgangspunkt i en basis  $v_1, v_2, \dots, v_n$  som spenner ut  $U$ .
2. Bruk så GS til å finne en ortogonal basis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  for  $U$ .
3. Da kan man, for alle  $x$  i  $V$ , beregne den ortogonale projeksjonen

$$P_U(x) = P_{u_1}(x) + P_{u_2}(x) + \dots + P_{u_n}(x).$$

4. Hvis  $V = \mathbb{R}^n$ , så får vi standardmatrisen

$$[P_U] = [P_U(e_1) | P_U(e_2) | \dots | P_U(e_n)]$$

og da kan man, for alle  $x$  i  $V$ , beregne den ortogonale projeksjonen

$$P_U(x) = [P_U]x.$$

## Sammendrag Projeksjoner II (Uke 9)

**Eks.:** Finn standardmatrisen til  $P_U$  hvor  $U$  er underrommet av  $\mathbb{R}^4$  utspent av

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

GS: ortogonal basis

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Regn ut  $P_U(e_1)$ :

$$P_U(e_1) = P_{u_1}(e_1) + P_{u_2}(e_1) + P_{u_3}(e_1)$$

## Sammendrag Prosjeksjoner II (Uke 9)

$$\begin{aligned} &= \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Sammendrag Projeksjoner II (Uke 9)

Siden  $P_U(e_1) = e_1$  skjønner vi at  $e_1$  ligger i  $U$ . En del regning gir at  $P_U(e_2)$ ,  $P_U(e_3)$  og  $P_U(e_4)$  er henholdsvis

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ og } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen er

$$[P_U] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

La  $U$  være et underrom av  $\mathbb{R}^n$  med underlineortonormal basis  $\{u_1, \dots, u_m\}$ , hvor  $m \leq n$ , og la  $P_U$  være lineærtransformasjonen gitt ved projeksjonen på  $U$ . Vi lar  $[P_U]$  betegne standardmatrisen til  $P_U$ , og lar  $A_U = [u_1 | \dots | u_m]$  være matrisen med vektorene  $u_1, \dots, u_m$  som kolonner. Da har vi at

$$[P_U] = A_U A_U^T.$$

## Sammendrag Prosjeksjoner II (Uke 9)

**Eks.:** Vi ønsker igjen å finne standardmatrisen til  $P_U$ , for  $U$  i foregående eksempel. En ortogonal basis ble oppgitt som

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

men vi trenger en ortonormal basis. For å få en ortonormal basis, deler vi hver vektor i basisen med dens lengde.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Matrisen  $A_U$  er gitt som

$$A_U = [u_1 | \cdots | u_m] = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

## Sammendrag Prosjeksjoner II (Uke 9)

og dermed er

$$A_U^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} A_U A_U^T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = [P_U]. \end{aligned}$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

A) Avgjør hvilke vektorer som er ortogonale med hverandre.

$$A1. v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A2. w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A3. x_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

▷ A1: Vektorene er ikke ortogonale fordi skalarproduktet av de to vektorene er ulikt null:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1^T v_2 = [2 \ -5 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -8.$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

▷ A2: Alle de tre vektorene er ortogonale til hverandre. Vi ser dette ved å sjekke skalarproduktet.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

▷ A3: Merk at vi nå betrakter vektorer med komplekse verdier, dermed må vi beregne det komplekse indreproduktet, hvor den første vektoren komplekskonjugeres.

$$\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-i \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

Vektorene  $(i, 0, 1)$  og  $(i, 1, 0)$  er altså ikke ortogonale, men vektoren  $(1, i, i)$  er ortogonal til hver av de to andre.

## Opgaver Projeksjoner II (Uke 9)

B) Bruk Gram–Schmidts metode for å finne en ortogonal basis med utgangspunkt i:

B1. Vektorene oppgitt i oppgave A1.

B2. Vektorene oppgitt i oppgave A2.

B2. Vektorene oppgitt i oppgave A3.

▷ B1: Vi bruker Gram–Schmidt ortogonalisering:

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - P_{u_1} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23/15 \\ 2/3 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

Da er  $(u_1, u_2)$  en ortogonal basis.

## Opgaver Projeksjoner II (Uke 9)

- ▶ B2: Vi har fra oppgave A2 at vektorene allerede er ortogonale.
- ▶ B3: Vektoren  $(1, i, i)$  er ortogonal til hver av de to andre. Det betyr at vi kan starte med å sette:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da er  $u_1$  og  $u_2$  ortogonale til hverandre, og vi må bare gjøre  $(i, 0, 1)$  ortogonal til begge disse. Vi setter:

$$u_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{u_1} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - P_{u_2} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da er  $(u_1, u_2, u_3)$  en ortogonal basis.

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

C) Finn den ortogonale projeksjonen av vektoren

$$v = \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

på underrommet  $U$  utspent av vektorene

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

▶ C: Vi bruker Gram–Schmidt for å finne en ortogonal basis. Vi setter

$$u_1 = w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og regner ut} \quad u_2 = u - \frac{\langle u, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

## Oppgaver Projeksjoner II (Uke 9)

$$u_2 = u + \frac{8}{5}u_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vi projiserer vektoren  $(i, 2 + i, 1)$  ned på hver basisvektor og summerer:

$$\begin{aligned} P_U \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{u_1} \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{u_2} \begin{bmatrix} i \\ 2 + i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 + 3i \\ 8 + 6i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{430} \begin{bmatrix} -234 + 162i \\ 117 - 81i \\ -65 + 45i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{86} \begin{bmatrix} 22 + 84i \\ 161 + 87i \\ -13 + 9i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Oppgaver Projeksjoner II (Uke 9)

D) La  $W = \text{Span}\{u, v\}$  hvor

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

D1. Finn en ortogonal basis for  $W$ .

D2. Regn ut standardmatrisen  $[P_W]$  til den ortogonale projeksjonen  $P_W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ned på  $W$ .

D3. Finnes det en  $3 \times 2$ -matrise  $A$  slik at  $[P_W]Ax = Ax$  for alle  $x$  i  $\mathbb{R}^2$ ?  
I så fall, finn den.

▷ D1:  $u \cdot v = 30$  så vektorene er ikke ortogonale. La  $u_1 = u$  og la

$$u_2 = v - \frac{u_1 \cdot v}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da utgjør  $u_1$  og  $u_2$  en ortogonal basis for  $W$ .

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

▷ D2:

$$\begin{aligned}P_W(e_1) &= P_{u_1}(e_1) + P_{u_2}(e_1) \\ &= \frac{u_1 \cdot e_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2 \cdot e_1}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_W(e_2) &= P_{u_1}(e_2) + P_{u_2}(e_2) \\ &= \frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2 \cdot u_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_W(e_3) &= P_{u_1}(e_3) + P_{u_2}(e_3) \\ &= \frac{u_1 \cdot e_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2 \cdot e_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

Dette gir oss at

$$[P_W] = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

▷ D3: Vi kan ta  $A = 0$ , altså  $3 \times 2$  nullmatrisen. Mer interessant er følgende: Siden  $W$  er invariant for  $P_W$  trenger vi bare at kolonnerommet til  $A$  ligger i  $W$ .  $W$  er kolonnerommet til  $P_W$ . Vi kan for eksempel ta:

$$A = [u, v] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

E) Anta at  $u_1, \dots, u_n$  er en ortonormal basis for  $\mathbb{R}^n$ . Vis at den inverse matrisen til  $A = [u_1 | \dots | u_n]$  er gitt ved  $A^{-1} = A^T$ .

▷ E: Siden  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  er en ortonormal basis, har vi

$$u_k^T u_k = 1 \text{ for hver } k, \text{ og } u_k^T u_l = 0 \text{ for } k \neq l.$$

Det betyr at

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & u_1^T u_3 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & u_2^T u_3 & \cdots & u_2^T u_n \\ u_3^T u_1 & u_3^T u_2 & u_3^T u_3 & \cdots & u_3^T u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & u_n^T u_3 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Dette vil si at  $A^T$  er inversen til  $A$ .

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

F) Husk at kontinuerlige funksjoner  $C([a, b])$  fra  $[a, b]$  til  $\mathbb{R}$  er et indreproduktrom, med indreproduktet mellom  $f$  og  $g$  som

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s)g(s)ds.$$

Vinkelen mellom  $f$  og  $g$ :  $\langle f, g \rangle = \cos \theta \|f\| \|g\|$ .

Nå betrakter vi kontinuerlige funksjoner over  $[0, 1]$ , dvs  $a = 0$ ,  $b = 1$ , og derfor  $\frac{1}{b-a} = 1$ .

Regn ut indreproduktet, vinkelen og avgjør om de er ortogonale:

F1.  $f(x) = -x$  og  $g(x) = \exp(x)$

F2.  $f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$  og  $g(x) = x - \sin x$

F3.  $f(x) = x$  og  $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}x$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

▷ F1: Funksjonene er ikke ortogonale fordi

$$\langle -x, \exp(x) \rangle = - \int_0^1 x \exp(x) dx = -1 \neq 0.$$

Lengdene er

$$\| -x \| = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

og

$$\| \exp(x) \| = \sqrt{\langle \exp(x), \exp(x) \rangle} = \sqrt{\int_0^1 \exp(2x) dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(\exp(2) - 1)}.$$

Funksjonene er nesten parallelle, men går i motsatt retning av hverandre:

$$\Theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle -x, \exp(x) \rangle}{\| -x \| \| \exp(x) \|}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(\exp(2) - 1)}}\right).$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

▷ F2: Indreproduktet er ulik 0:

$$\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)(x - \sin x) dx = 0.012.$$

Lengdene er

$$\|x^3 - \frac{1}{3}x\| = \sqrt{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x^3 - \frac{1}{3}x \rangle} \approx 0.216$$

$$\text{og } \|x - \sin x\| = \sqrt{\langle x - \sin x, x - \sin x \rangle} = \int_0^1 (x - \sin x)^2 dx \approx 0.061.$$

Funksjonene er nesten parallelle:

$$\Theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle}{\|x^3 - \frac{1}{3}x\| \|x - \sin x\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0.012}{0.216 \cdot 0.061}\right) = \cos^{-1}(0.91)$$

▷ F3:  $\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x \rangle = 0$ , vinkelen  $\Theta = 90^\circ$ .

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

G) Vi ser på indreproduktrommet av kontinuerlige funksjoner  $C([0, 1])$ .

Regn ut lengden til:

G1.  $f(x) = x$

G2.  $f(x) = x^2$

G3.  $f(x) = x^3$

G4.  $f(x) = x^4$

G5.  $f(x) = x^5$

G6. Hva er lengden til  $x^n$  for en vilkårlig  $n$ ?

▷ G1-G5:

$$\|x^1\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|x^3\| = \sqrt{\langle x^3, x^3 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\|x^4\| = \sqrt{\langle x^4, x^4 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^8 dx} = \frac{1}{\sqrt{9}},$$

$$\|x^5\| = \sqrt{\langle x^5, x^5 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{10} dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

▷ G6: Generelt får vi:  $\|x^n\| = \sqrt{\langle x^n, x^n \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

H) Betrakt underrommet  $V = \text{Sp}\{1, x, \exp(x)\}$  av  $C[0, 1]$ , med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(s)g(s)ds$$

H1. Finn en ortogonal basis for  $V$ .

H2. La  $h(x) = x^2$ . Finn  $g(x) = P_V h(x)$ .

▷ H1: Vi bruker Gram–Schmidt for å gjøre  $1$  og  $\exp(x)$  ortogonal. Vi setter  $u_1 = 1$ , og regner ut

$$u_2 = \exp(x) - \frac{\langle \exp(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = \exp(x) - \exp(1) + 1.$$

Da trenger vi  $u_3$ :

$$u_3 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 \\ - \frac{\langle x, \exp(x) - \exp(1) + 1 \rangle}{\langle \exp(x) - \exp(1) + 1, \exp(x) - \exp(1) + 1 \rangle} \cdot (\exp(x) - \exp(1) + 1)$$

## Oppgaver Projeksjoner II (Uke 9)

Derfor

$$u_3 = x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1}.$$

▷ H2: For å finne projeksjonen av en vektor ned i et plan må man projisere den ned på en ortogonal basis som spenner ut planet. Det har vi, fra forrige oppgave, og regner ut

$$\begin{aligned} P_V h(x) &= \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 \\ &+ \frac{\langle x^2, \exp(x) - \exp(1) + 1 \rangle}{\langle \exp(x) - \exp(1) + 1, \exp(x) - \exp(1) + 1 \rangle} \cdot (\exp(x) - \exp(1) + 1) \\ &+ \frac{\langle x^2, x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1} \rangle}{\langle x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1}, x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1} \rangle} \cdot \left( x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1} \right) \end{aligned}$$

## Oppgaver Prosjeksjoner II (Uke 9)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} - \frac{4 \exp(1) - 10}{3(\exp(1) - 3)(\exp(1) - 1)} (\exp(x) - \exp(1) + 1) + \\ &\quad + (12 - 12 \exp(1)) \frac{\frac{1}{\exp(1)-1} - \frac{7}{12}}{19 - 7 \exp(1)} \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4 \exp(1) - 10}{3(\exp(1) - 3)(\exp(1) - 1)} (\exp(x) - \exp(1) + 1) \\ &\quad - \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1}\right) \\ &\approx \frac{1}{3} + 0,601(\exp(x) - \exp(1) + 1) - \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\exp(x)}{\exp(1) - 1}\right) \end{aligned}$$