TMA4115 Matematikk 3: Projeksjon

2025 Uke 8

Grunnleggende definisjon

- Gitt et vektorrom V og et underrom $U \subset V$, defineres projeksjonen $P_U(w)$ av en vektor $w \in V$ som den unike vektoren i U som minimerer avstanden $\|w - u\|$
- Skrives ofte slik at:

$$w = P_U(\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{x}, \quad \text{hvor } \boldsymbol{x} \in U^{\perp}.$$

- I tilfelle U er utspent av en vektor $\boldsymbol{v}$, får vi formelen:

$$P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}.$$

Eksempel 1: Projeksjon i $\mathbb{R}^2$

Oppgave

Gitt vektorene

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Beregn projeksjonen $P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})$ av $\boldsymbol{w}$ på linjen utspent av $\boldsymbol{v}$.

(b) Vis at differansen $\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})$ er ortogonal til $\boldsymbol{v}$.

(c) Bestem lengden til den ortogonale komponenten $\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})$.

(d) Vis at Pythagoras teorem

$$\|P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})\|^2 + \|\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})\|^2 = \|\boldsymbol{w}\|^2$$

er oppfylt.

Eksempel 1 løsning

(a) Projeksjonen er gitt ved

$$P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(b) Differansen er gitt ved

$$\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = \frac{8}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så

$$(\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})) \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{8}{5^2}(2 - 2) = 0.$$

Eksempel 1 løsning

(c) Lengden er gitt ved

$$\|\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})\| = \sqrt{(\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})) \cdot (\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}))} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

(d) Pythagoras teorem er oppfylt fordi

$$\|\boldsymbol{w} - P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})\|^2 + \|P_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})\|^2 = \frac{8^2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

og

$$\|\boldsymbol{w}\| = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Projeksjon med ortogonale basiser

- Dersom U har en ortogonal (eller ortonormal) basis $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, kan projeksjonen skrives som:

$$P_U(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_i} \boldsymbol{u}_i.$$

- Egenskap: Differansen $\boldsymbol{w} - P_U(\boldsymbol{w})$ er ortogonal til alle basisvektorene i U.
- Dette uttrykket viser også at projeksjonen er en lineær transformasjon.

Eksempel 2: Projeksjon på et plan

Oppgave

La $V = \mathbb{R}^3$. Gitt underrommet og vektoren

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn en normalvektor $\boldsymbol{n}$ til U.

(b) Beregn projeksjonen av $\boldsymbol{w}$ på $U^\perp$ ved hjelp av formelen

$$P_{U^\perp}(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n}.$$

(c) Bestem projeksjonen av $\boldsymbol{w}$ på U.

(d) Bestem matrisen A slik at $A\boldsymbol{v} = P_U(\boldsymbol{v})$.

Eksempel 2 løsning

(a) Vektoren

$$n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

er en normalvektor til U.

(b) Vi finner

$$P_{U^\perp}(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Projeksjonen på U er

$$P_U(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} - P_{U^\perp}(\boldsymbol{w}) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2 løsning

(d) For at matrisen A skal tilsvare projesjonen så må kolonnvekoterne, $\boldsymbol{a}_i$, i A vare gitt ved

$$\boldsymbol{a}_i = P_U(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i - P_{U^\perp}(\boldsymbol{e}_i)$$

der $\boldsymbol{e}_i$ er standardbasisen for $\mathbb{R}^3$. Dette gir

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Indreproduktrom

- Et *indreproduktrom* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ er et reelt vektorrom utstyrt med et indreprodukt som for alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ oppfyller:
  - *(i)* **Symmetri:** $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$.
  - *(ii)* **Linearitet:** $\langle a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle = a\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle + b\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \rangle$ for alle $a, b \in \mathbb{R}$.
  - *(iii)* **Positivitet:** $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$, og $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ bare dersom $\boldsymbol{v} = 0$.
- Normen defineres ved $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$, og to vektorer er ortogonale hvis $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$.

Eksempel 3: Projeksjon i $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$

Oppgave

For to funksjoner f og g i $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ kan vi definiere

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

(a) Vis at $\langle \cdot, \cdot \rangle$ er et indreprodukt.

(b) Vis at $\cos(x)$ og $\sin(x)$ er ortogonale.

(c) Finn projeksjonene av funksjonen x på underrommene utspent av $\cos(x)$ og $\sin(x)$.

Eksempel 3 løsning

(a) for funksjoner $f, g, h \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ og skalarer $a, b \in \mathbb{R}$ får vi

(i)

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$$

(ii)

$$\begin{aligned}\langle af + bh, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} (af(x) + bh(x))g(x)dx \\ &= a\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx + b\int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(x)dx \\ &= a\langle f, g\rangle + b\langle h, g\rangle\end{aligned}$$

(iii)

$$\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \geq 0$$

siden $[f(x)]^2 \geq 0$. Det går også at vise at en kontinuerlig funksjon, f, slik at $\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = 0$ må vare $f(x) = 0$.

Eksempel 3 løsning

(b)

$$\begin{aligned}\langle \cos(x), \sin(x)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx \\ &= -\frac{1}{4}\left[\cos(2x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

(c) Projeksjonene er

$$P_{\cos}(x) = \frac{\langle \cos(x), x\rangle \cos(x)}{\langle \cos(x), \cos(x)\rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\cos(x)dx}\cos(x) = 0,$$

og

$$P_{\sin}(x) = \frac{\langle \sin(x), x\rangle \sin(x)}{\langle \sin(x), \sin(x)\rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sin(x)dx}\sin(x) = 2\sin(x).$$