

# TMA4115 Matematikk 3

Uke 7, V2025

## Lineærtransformasjoner

Institutt for matematiske fag  
NTNU, Trondheim

Februar 11, 2025

# Sammendrag Uke 5 + Uke 6

## Vektorrom

Et vektorrom  $(V, +, \cdot)$  er en matematisk struktur som består av en mengde vektorer  $V$  sammen med to operasjoner:

vektoraddisjon  $+$  og skalarmultiplikasjon  $\cdot$ .

som må oppfylle visse aksiomer:

- 1) assosiativitet  $(a + (b + c) = (a + b) + c)$
- 2) kommutativitet  $(a + b = b + a)$
- 3) eksistens av en nullvektor  $(0 + a = a)$
- 4) eksistens av en inverser  $(a + (-a) = 0)$
- 5)-8) samt kompatibilitet med skalarer  $(a \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot a \in V)$

Et underrom  $U$  av et vektorrom  $V$  er en delmengde  $U \subseteq V$  som i seg selv utgjør et vektorrom, med addisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte som i  $V$ .

# Sammendrag Uke 5 + Uke 6

## Basis

En *basis* for et vektorrom  $V$  er en liste  $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  av vektorer i  $V$  som både utspenner  $V$  og er lineært uavhengige.

Da kan hver vektor  $v \in V$  skrives som en lineærkombinasjon

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \quad \{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{K}$$

av basis vektorene i  $\mathcal{B}$  på en entydig måte.

## Eksempler:

- i)  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 0$ , er et reelt vektorrom.
- ii) Polynomer av begrenset grad  $\mathcal{P}_n$  er et reelt/komplekst vektorrom.
- iii) Vektorromer knyttet til en  $m \times n$  matrise

$$A = [a_1 | a_2 | \dots | a_n] = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix}$$

# Sammendrag Uke 5 + Uke 6

## Eksempler (fortsatt):

- ▶ Nullrom: alle vektorer  $x$  slik at  $Ax = 0$

$$\text{Null}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

- ▶ Kolonnerom: utspent av kolonnene i  $A$

$$\text{Col}(A) := \text{Sp}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

- ▶ Radrommet: utspent av radene i  $A$

$$\text{Row}(A) := \text{Col}(A^T)$$

- ▶ For en  $m \times n$ -matrise har vi at  $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) = n$

**Bemerkning:** La  $A$  være en  $m \times n$ -matrise. Da har kolonnerommet og radrommet til  $A$  samme dimensjon:  $\dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$ . Dette ene tallet, som både er dimensjonen til kolonnerommet og dimensjonen til radrommet, kalles rangen til matrisen. Vi skriver:

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A) = \dim \text{Row}(A)$$

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Husk:

La  $f: A \rightarrow B$  være en funksjon.

- ▶ Vi sier at  $f$  er *injektiv* (eller en-til-en) hvis det for hver  $b$  i  $B$  er maksimalt én  $a$  i  $A$  slik at  $f(a) = b$ .
- ▶ Vi sier at  $f$  er *surjektiv* (eller på) hvis det for hver  $b$  i  $B$  finnes en  $a$  i  $A$  slik at  $f(a) = b$ .
- ▶ *Bildet* til  $f$  er mengden av alle elementer i kodomenet som blir truffet av  $f$ , altså delmengden

$$\text{Im}f = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

Det følger umiddelbart fra definisjonen at en funksjon  $f: A \rightarrow B$  er surjektiv hvis og bare hvis bildet til funksjonen er hele kodomenet:

$$\text{Im}f = B.$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

- En *lineærtransformasjon* er en funksjon  $T : V \rightarrow W$  mellom to vektorrom  $V$  og  $W$  som oppfyller følgende to kriterier
1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$  for alle  $u$  og  $v$  i  $V$
  2.  $T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u)$  for alle vektorer  $u$  i  $V$  og alle skalarer  $\alpha$

To eksempler på lineærtransformasjoner er

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{gitt ved} \quad T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - z \end{bmatrix}$$

og

$$S : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{gitt ved} \quad S(p(x)) = p'(x)$$

Den neste funksjonen er ikke en lineærtransformasjon

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{gitt ved} \quad T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 1 \end{bmatrix}$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

- ▶ La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er
  - ▶ *Kjernen* til  $T$  er alle vektorer i  $V$  som sendes til nullvektoren i  $W$

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

- ▶ *Bildet* til  $T$  er alle vektorer i  $W$  vi kan "treffe" med  $T$

$$\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

- ▶ La  $A$  være en  $m \times n$ -matrise. Da er  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gitt ved

$$T_A(x) = Ax$$

en lineærtransformasjon.

- ▶ Hvis  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  er en lineærtransformasjon gitt ved  $T_A(x) = Ax$ , så er  $\text{Ker}(T) = \text{Null}(A)$  og  $\text{Im}(T) = \text{Col}(A)$ .

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

- ▶ For  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  så er  $T(x) = Ax$  for alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , der

$$A = [ T(e_1) \mid T(e_2) \mid \cdots \mid T(e_n) ]$$

der  $e_i$ -ene er *standardbasisvektorene* for  $\mathbb{R}^n$ . Denne matrisen kaller vi *standardmatrisen* til  $T$ .

- ▶  $T : V \rightarrow W$  er *injektiv* dersom  $T(u) = T(v)$  impliserer at  $u = v$ . Med andre ord vil det for hver  $w$  i  $W$  finnes maksimalt én  $v$  i  $V$  slik at  $T(v) = w$ . Dette er ekvivalent med at  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .
- ▶  $T : V \rightarrow W$  er *surjektiv* dersom det for hver  $w$  i  $W$  finnes en  $v$  i  $V$  slik at  $T(v) = w$ , dvs  $\text{Im}(T) = W$ .

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Korte (quiz-)oppgaver

Sant eller usant?

Hvis  $T : V \rightarrow W$  er en lineærtransformasjon, så vil

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

Ja, dette er en kombinasjon av de to egenskapene til lineære transformasjoner. Husk at

1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2.  $T(\alpha u) = \alpha \cdot T(u)$

Derfor finner vi

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &= T(\alpha u) + T(\beta v) \\ &= \alpha T(u) + \beta T(v) \end{aligned}$$

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Korte (quiz-)oppgaver

Sant eller usant?

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er  $\text{Ker}(T)$

- ▶ et underrom av  $V$ ?
- ▶ et underrom av  $W$ ?
- ▶ ikke et underrom?

Husk at  $\text{Ker}(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ , dvs at kjernen til en lineærtransformasjon  $T$  er et underrom av domenet,  $V$ , siden den inneholder alle elementer som avbildes til null, og er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.

$u, v \in \text{Ker}(T) \subset V, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}T(\alpha u + v) &= T(\alpha u) + T(v) \\ &= \alpha T(u) + T(v) \\ &= \alpha 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Korte (quiz-)oppgaver

Sant eller usant?

La  $T : V \rightarrow W$  være en lineærtransformasjon. Da er  $\text{Im}(T)$

- ▶ et underrom av  $V$ ?
- ▶ et underrom av  $W$ ?
- ▶ ikke et underrom?

Husk at  $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ , dvs at bildet til  $T$  er alle vektorer i  $W$  vi kan “treffe” med  $T$ .

La  $\alpha \in \mathbb{K}$  og  $x, y \in \text{Im}(T) \subset W$ , dette betyr at det finnes  $u$  og  $v$  i  $V$  slik at  $T(u) = x$  og  $T(v) = y$ . Vi må vise at  $\alpha x + y$  er i bildet til  $T$ .

$$\begin{aligned}\alpha x + y &= \alpha T(u) + T(v) \\ &= T(\alpha u) + T(v) \\ &= T(\alpha u + v)\end{aligned}$$

Dermed ser vi at  $\alpha x + y$  er i bildet til  $T$ .

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Korte (quiz-)oppgaver

Sant eller usant?

En lineærtransformasjon kan ikke være både injektiv og surjektiv samtidig.

Dette er *usant*.

Hvis  $T: V \rightarrow W$  er en lineærtransformasjon som har en invers, så er  $T$  en *isomorfi*. Da sier vi dessuten at vektorrommene  $V$  og  $W$  er *isomorfe*, og vi skriver  $V \cong W$ .

$T: V \rightarrow W$  er en isomorfi hvis og bare hvis den er både injektiv og surjektiv.

# Lineærtransformasjoner (Uke 7)

## Korte (quiz-)oppgaver

Sant eller usant?

En lineærtransformasjon  $T : V \rightarrow W$  sender alltid nullvektor til nullvektor.

Dette er *sant*.

En lineærtransformasjon vil alltid sende  $0$  i  $V$  til nullvektoren i  $W$ .

$$\begin{aligned}T(0) &= T(0) + 0 = T(0) + (T(0) + (-T(0))) \\ &= (T(0) + T(0)) + (-T(0)) \\ &= T(0 + 0) + (-T(0)) \\ &= T(0) + (-T(0)) \\ &= 0\end{aligned}$$

Det betyr at dersom vi har en funksjon som ikke sender nullvektor til nullvektor så er det ikke en lineærtransformasjon. (Men merk at vi kan ha funksjoner som ikke er lineærtransformasjoner som likevel sender nullvektor til nullvektor.)

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

A) Avgjør om følgende funksjoner er lineærtransformasjoner. Hvis de er det, finn standardmatrisen.

$$\text{A1. } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ gitt ved } T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y + z \end{bmatrix}$$

$$\text{A2. } S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ gitt ved } S \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = x^2 y$$

– A1)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(x_1, y_1, z_1)^T, (x_2, y_2, z_2)^T \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T \left( \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= T \left( \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = T \left( \begin{bmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 \\ \alpha z_1 + z_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ \alpha y_1 + y_2 + \alpha z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Derfor

$$\begin{aligned} T \left( \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix} \\ &= T \left( \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} \right) + T \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = T \left( \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) + T \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) + T \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Vi finner nå standardmatrisen til  $T$ . Husk at dette er matrisen

$$A = [T(e_1) \mid T(e_2) \mid T(e_3)]$$

med hensyn til standardbasisvektorene  $(e_1, e_2, e_3)$  i  $\mathbb{R}^3$ .

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Vi må altså undersøke hva transformasjonen gjør med  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , i  $\mathbb{R}^3$ :

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så vi får at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

– A2) Vi ser at

$$S \left( 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = S \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 8 \quad \text{og} \quad S \left( 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2S \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

Derfor ser vi at  $S$  ikke er en lineærtransformasjon.

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

B) Hvilken av følgende funksjoner er IKKE en lineær transformasjon?

B1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) := (x, z)$

B2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) := (x, y - 1, z)$

B3.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) := (2x, y - x)$

B4.  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) := (y, x)$

Svar: – B2)  $T(0, 0, 0) = (0, -1, 0)$ . Derfor er  $T$  ikke en lineærtransformasjon. (Siden en lineærtransformasjon skal sende  $0$  til  $0$ .)

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

C) Lineære transformasjoner på polynomrom I.

C1) Vi betrakter

$$\mathcal{P}_2[x] = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

La  $F : \mathcal{P}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$  være en lineærtransformasjon slik at  $F(1 + x) = 0$ ,  $F(1 - x^2) = 0$  og  $F(x^2 - x) = 2$ . Beregn  $F(1 + x + x^2) = ??$

C2) La  $p_1(x) = x^2 - 2$ ,  $p_2(x) = -x^2 + x + 2$ ,  $p_3(x) = 3x^2 + x - 5$  og

$$q(x) = 4x^2 + x - 7$$

Nå vil  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$  være en basis for  $\mathcal{P}_2$ .

Finn koordinatvektoren  $[q]_{\mathcal{B}}$  til  $q$  med hensyn på basisen  $\mathcal{B}$ .

– C1) Vi viser først at  $1 + x + x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(1 - x^2) + \gamma(x^2 - x)$  med  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = -1/2$  og  $\gamma = 1/2$ .

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Derfor ser vi at

$$\begin{aligned}F(1+x+x^2) &= F(\alpha(1+x) + \beta(1-x^2) + \gamma(x^2-x)) \\ &= \alpha F(1+x) + \beta F(1-x^2) + \gamma F(x^2-x) \\ &= \frac{3}{2}0 - \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2 = 1\end{aligned}$$

– C2) Vi ønsker å uttrykke polynomet  $q$  i basen  $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\begin{aligned}q(x) &= 4x^2 + x - 7 \\ &= \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) \\ &= (\alpha - \beta + 3\gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + (-2\alpha + 2\beta - 5\gamma)1\end{aligned}$$

Derfor finner vi systemet

$$\alpha - \beta + 3\gamma = 4, \quad \beta + \gamma = 1, \quad -\alpha + 2\beta - 5\gamma = -7.$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

I utvidet matriseform

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & -7 \end{array} \right)$$

Ved bruk av Gauss-eliminering finner vi løsningen

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

slik at

$$q(x) = 4x^2 + x - 7 = 1p_1(x) + 0p_2(x) + 1p_3(x)$$

eller

$$[q]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

D) Lineære transformasjoner på polynomrom II.

$$D1) T : \mathcal{P}_3[x] \rightarrow \mathcal{P}_3[x]$$

$$(Tp)(x) = p(x) - x \frac{d}{dx} p(x).$$

Vis at dimensjonen til  $\text{Col}(T)$  er 3.

$$D2) T : \mathcal{P}_n[x] \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}[x]$$

$$(Tp)(x) := p'(x) - \int_0^x p(s) ds$$

Vis at dimensjonen til nullrommet  $\text{Null}(T)$  til  $T$  er null.

– D1) Den standardbasisen for polynomer av grad høyest tre (ordens tre) i et polynomrom  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ , er gitt av mengden av monomene  $\{1, x, x^2, x^3\}$ . Dette betyr at ethvert polynom av grad maksimalt tre kan skrives som en lineær kombinasjon av disse basisvektorene:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

For å finne standardmatrisen  $A$  for  $T$  med hensyn til standardbasen, følger vi disse stegene: anvend  $T$  på hver basisvektor, dvs beregn  $T(1)$ ,  $T(x)$ ,  $T(x^2)$ ,  $T(x^3)$ :

$$T(1) = 1, \quad T(x) = 0, \quad T(x^2) = -x^2, \quad T(x^3) = -2x^3$$

og sett opp standardmatrisen: koeffisientene til basisvektorene i hvert transformasjonsresultat danner kolonnene i transformasjonsmatrisen.

$$A = [T(1) \mid T(x) \mid T(x^2) \mid T(x^3)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Kolonnevektorene med pivot-elementer spenner kolonnerommet, det er 3.

– D2) Vi vet at nullrommet til  $T$  ikke er tom; den inneholder nullpolynomet. La  $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  være et polynom i nullrommet til  $T$ .

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Dette betyr at

$$(Tp)(x) = 0 = p'(x) - \int_0^x p(s)ds.$$

Fra dette utleder vi

$$p'(x) = \int_0^x p(s)ds.$$

Det finnes kun ett polynom som oppfyller denne ligningen (du bør overbevise deg selv om dette ved å regne ut noen eksempler).

Ja, kun nullpolynomet,  $p = 0$ , løser denne ligningen. Dette betyr at nullrommet kun inneholder nullpolynomet,  $\text{Null}(T) = \{0\}$ .

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

E) La  $T : \mathcal{P}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$  være gitt ved  $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix}$ .

Vis at  $T$  er en lineærtransformasjon og finn kjernen til  $T$ .

Vi bruker at derivasjon er en lineærtransformasjon, dvs at  $(p + q)'(x) = p'(x) + q'(x)$  og  $(p + q)''(x) = p''(x) + q''(x)$  og  $(cp)'(x) = c \cdot p'(x)$  og  $(cp)''(x) = c \cdot p''(x)$ . Dermed er

$$\begin{aligned} T(p + q) &= \begin{bmatrix} (p + q)(0) \\ (p + q)'(1) \\ (p + q)''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) + q(0) \\ p'(1) + q'(1) \\ p''(2) + q''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(0) \\ q'(1) \\ q''(2) \end{bmatrix} \\ &= T(p) + T(q) \end{aligned}$$

og

$$T(cp) = \begin{bmatrix} (cp)(0) \\ (cp)'(1) \\ (cp)''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp'(1) \\ cp''(2) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} = cT(p)$$

Begge kriteriene er oppfylt, så dette er en lineærtransformasjon.

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Kjernen til  $T$  består av alle polynomer  $p(x) = ax^2 + bx + c$  som er slik at

$$T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

For  $p(x) = ax^2 + bx + c$  har vi at  $p'(x) = 2ax + b$  og  $p''(x) = 2a$ .

Dermed blir

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(1) \\ p''(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2a + b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Dette er lik nullvektor kun når

$$a = 0, b = 0 \quad \text{og} \quad c = 0,$$

dvs når  $p(x) = 0$ . Vi konkluderer derfor med at  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

F) La  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  være en lineærtransformasjon slik at

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen, kjernen og bildet til  $T$ . Er  $T$  injektiv og/eller surjektiv?

Du vil kanskje bruke at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ønsker å finne

$$A = [ T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3) ].$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

For å finne ut hva  $T(e_1)$ ,  $T(e_2)$ ,  $T(e_3)$  er, skriver vi  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  som en

lineærkombinasjon av  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , og så bruke det at  $T$  er en

lineærtransformasjon for å finne  $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ . Dette betyr at vi må løse ligningssystemet med totalmatrise

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

For  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , får vi to nye ligningssystem med samme venstreside som det første, så vi slår sammen alt til én totalmatrise og løser de tre

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

ligningssystemene samtidig:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Men dette er jo akkurat det vi gjør når vi skal finne inversmatriser, så vi kan bruke hintet og finne ut at

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

Dette forteller oss at

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

som videre betyr at

$$\begin{aligned}T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= T\left(0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\&= 0 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - 1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\&= 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

På helt tilsvarende måte finner vi at

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Oppsummert, så har vi nå at standardmatrisen vil være

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi skal nå finne kjernen og bildet til  $T$  og avgjøre om  $T$  er injektiv og/eller surjektiv. Vi vet at  $\text{Ker}(T) = \text{Null}(A)$ , og vi finner nullrommet til  $A$  ved å løse ligningen  $Ax = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \end{array} \right].$$

Vi velger  $x_3 = t$  som fri variabel og får da at  $x_2 = -\frac{4}{3}t$  og  $x_1 = -\frac{2}{3}t$ . Det betyr at

$$\text{Null}(A) = \text{Ker}(T) = \text{Sp} \left\{ \left[ \begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ t \\ 1 \end{array} \right] \right\}.$$

Siden  $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ , er  $T$  ikke injektiv.

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Vi finner nå bildet til  $T$  (som er likt kolonnerommet til  $A$ ) ved å radredusere  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Vi ser at de to første kolonnene er pivotkolonner, så

$$\text{Im}(T) = \text{Col}(A) = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Disse to vektorene er lineært uavhengige og utspenner dermed hele  $\mathbb{R}^2$ . Lineærtransformasjonen  $T$  er med andre ord surjektiv.

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

G) To ulike ordnede basier for  $\mathbb{R}^2$  er  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$  og  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ , der

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

G1. En vektor har koordinater  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  med hensyn på basisen  $\mathcal{B}$ . Hva er koordinatene til denne vektoren i standardbasisen?

G2. Bestem basisbyttematrisen fra  $\mathcal{C}$  til  $\mathcal{B}$ .

– G1) Koordinatvektoren  $[x]_{\mathcal{B}}$  til en vektor  $x$  med hensyn på en basis  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$  er en vektor  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  slik at  $x = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2$ .

Så når  $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , vil

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

$$x = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 = 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi skal finne en matrise  $M$  som er slik at  $[x]_{\mathcal{B}} = M \cdot [x]_{\mathcal{C}}$ .

For en vilkårlig vektor  $x$  vil koordinatvektorene med hensyn på basisene  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$  og  $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$  være henholdsvis

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{slik at} \quad x = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2$$

og

$$[x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{slik at} \quad x = y_1 \cdot c_1 + y_2 \cdot c_2.$$

Dermed må

$$x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 = y_1 \cdot c_1 + y_2 \cdot c_2,$$

eller

$$[b_1 \mid b_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [c_1 \mid c_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

Her er  $[b_1 \ b_2]$  matrisen som har  $b_1$  og  $b_2$  som kolonner (og tilsvarende for høyresiden med  $c_1$  og  $c_2$ ), så vi får at

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Altså står vi nå igjen med

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{C}}.$$

Det betyr at

$$[x]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_M [x]_{\mathcal{C}}$$

Vi bruker at for en  $2 \times 2$ -matrise så finner vi invers på denne måten:

## Lineærtransformasjoner (Uke 7)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

og finner at

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Til slutt ender vi da opp med at matrisen vi er ute etter er

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$