TMA4115 Matematikk 3: Vektorrom

2025 Uke 6

Definisjon av et vektorrom

Definisjon: En mengde V er et vektorrom dersom det er definert en addisjon og en skalarmultiplikasjon som tilfredsstiller følgende aksiomer:

- (V1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assosiativitet)
- (V2) $u + v = v + u$ (Kommutativitet)
- (V3) Det finnes en nullvektor 0 slik at $u + 0 = u$ for alle $u \in V$
- (V4) For hver u finnes en invers $-u$ slik at $u + (-u) = 0$
- (V5) $(ab)u = a(bu)$
- (V6) $1u = u$
- (V7) $a(u + v) = au + av$
- (V8) $(a + b)u = au + bu$

Eksempel 1

Oppgave

Avgjør om følgende mengder er (reelle) vektorrom:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - 5y + 3z = 2 \right\}$ (b) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - 5y + 3z = 0 \right\}$

(c) $\{A \in \mathcal{M}_2 | \det(A) = 0\}$

(d) $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) | f'(0) = 0\}$

(e) $\{p \in \mathcal{P}_2 | p(2) = 0\}$

(f) $\{(a_1, a_2, a_3, \ldots);\, a_n \in \mathbb{R} | \lim_{n\to\infty} a_n \text{ eksisterer}\}$

Eksempel 1 løsning

(a) Dersom $0 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 2$ så er $\mathbf{0}$ ikke i mengden så den er ikke et vektorrom.

(b) For to vektorer $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ i mengden og et tall $a \in \mathbb{R}$ har vi

$$(x_1+x_2)-5(y_1+y_2)+3(z_1+z_2) = (x_1-5y_1+3z_1)+(x_2-5y_2+3z_2) = 0$$

så $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ tilhører mengden og

$$ax_1 - 5ay_1 + 3z_1 = a(x_1 - 5y_1 + 3z_1) = 0$$

så av_1 tilhører også mengden. Det følger at mengden er et vektorrum (et underrom til $\mathbb{R}^3$).

Eksempel 1 løsning

(c) Hvis $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ så tilhører begge mengden, men $A + B = I$ så mengden er ikke lukket under addisjon og er derfor ikke et vektorrom.

(d) For to funksjoner f_1 og f_2 i mengden og et tall $a \in \mathbb{R}$ har vi

$$(f_1 + f_2)'(0) = f_1'(0) + f_2'(0) = 0$$

og

$$(af_1)'(0) = af_1'(0) = 0$$

så mengden er et vektorrom (et underrom til $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

Eksempel 1 løsning

(e) For to polynomer p_1 og p_2 i mengden og et tall $a \in \mathbb{R}$ har vi

$$(p_1 + p_2)(2) = p_1(2) + p_2(2) = 0$$

og

$$(ap_1)(2) = ap_1(2) = 0$$

så mengden er et vektorrom (et underrom til $\mathcal{P}_2$).

(f) Hvis vi har $(a_1, a_2, \ldots)$ og $(b_1, b_2, \ldots)$ i mengden med grenseverdier

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

og $c \in \mathbb{R}$ da har summen $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ og produktet $(ca_1, ca_2, \ldots)$ grenseverdier

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} ca_n = ca,$$

så mengden er et vektorrom (underrom til $\{(a_1, a_2, a_3, \ldots) | \, a_n \in \mathbb{R}\}$)

Basis for et vektorrom

Definisjon: En basis for et vektorrom V er en liste av vektorer $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ slik at:

- B utspenner V: Hver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon av vektorene i B.
- B er lineært uavhengig: Ingen vektor i B kan skrives som en lineærkombinasjon av de andre.

Dimensjonen til V er antallet vektorer i en basis.

Eksempel 2

Oppgave

Finn en basis til følgende vektorrom:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - 5y + 3z = 0 \right\}$

(b) $\{p \in \mathcal{P}_2 |\, p(2) = 0\}$

Finn dimensjonen til følgende vektorrom:

(c) $\left\{ A \in \mathcal{M}_n | A^T = A \right\}$

(d) $\{(a_1, a_2, a_3, \ldots) |\, a_n \in \mathbb{R}\}$

Eksempel 2 løsning

(a) Vi vet at ligningen $x - 5y + 3z =$ definierer et plan, så vi trengere to lineært uavhengige vektorer som basis. F. eks.

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Et polynom i rommet kan generellt skrives som

$$p = (ax + b)(x - 2) = ax(x - 2) + b(x - 2).$$

Det vil si som en lineærkombinasjon av $\boldsymbol{b}_1 = (x - 2)$ og $\boldsymbol{b}_2 = x(x - 2)$ så spennet av $\boldsymbol{b}_1$ og $\boldsymbol{b}_2 = x(x - 2)$ er hele rommet. De er også lineært uavhengige siden de er polynom av forskjellig grad, så de er en basis.

Eksempel 2 løsning

(c) Mengden av $n \times n$ matriser B_{ij} som er 1 i rad i kolonn j og null alle andre steder er en basis for $\mathcal{M}_n$ med n^2 elementer. En matris

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} B_{ij}$$

oppfyller $A^T = A$ hvis og kun hvis $c_{ij} = c_{ji}$ for alle $1 \leq i \leq n$ og $1 \leq j \leq n$. Da er

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} c_{ij} \frac{B_{ij} + B_{ji}}{2},$$

som betyr at $\frac{B_{ij}+B_{ji}}{2}$ for alle $1 \leq j \leq i \leq n$ er en basis for rommet av symmetriske matriser. Antallet elementer og dermed dimensjonen er $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Eksempel 2 løsning

(d) Vi kan lage $\boldsymbol{b}_i$ som er 1 på plass i og null alle andre steder. Det vill si

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= (1, 0, 0, \ldots) \\ \boldsymbol{b}_2 &= (0, 2, 0, \ldots) \\ \boldsymbol{b}_3 &= (0, 0, 3, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dette er en mengde av uendlig mange lineært uavhengige vektorer så rommet er uendligdimensjonalt.