TMA4115 Matematikk 3: Lineær uavhengighet og determinanter

2025 Uke 5

Lineær uavhengighet

Lineært spenn: Mengden av alle lineærkombinasjoner av en vektormengde. Eksempel:

$$Sp\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n | c_i \in \mathbb{R}\}.$$

Lineær uavhengighet: En mengde vektorer er lineært uavhengig hvis den eneste løsningen til

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

er $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Ellers er de lineært avhengige.
Kobling: Mengden av vektorer $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ er lineært uavhengig hvis og bare hvis $Sp\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en n-dimensjonal mengde.

Eksempel 1

Oppgave

Avgjør om vektorene nedenfor er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\3\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1\\4\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\3\end{bmatrix}$

(e) Hvor mange løsninger har ligningen

$$x\begin{bmatrix}1\\4\\-4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix}?$$

Eksempel 1 løsning

Løsning:

(a) En vektor (som ikke er null i det minste) er alltid lineært uavhengig.

(b) Gjennom inspeksjon kan vi se at vektorene oppfyller

$$3\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\0\\3\end{bmatrix}=0$$

så vektorene er ikke lineært uavhengige.

Eksempel 1 løsning

(c) Vi prøver å løse systemet

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi bruker Gausseliminasjon som gir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{R3 \to R3 + 4R1}{\overset{R2 \to (R2 - 4R1)\frac{1}{9}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R3 \to (R3 - 5R2)\frac{1}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Herfra ser vi at systemet har unik løsning. Den er $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ og vektorene er lineært uavhengige.

Eksempel 1 løsning

(d) Fire vektorer i $\mathbb{R}^3$ er alltid lineært avhengige.

(e) Dersom det er en ligning med vektorene i deloppgave (c) så er løsningen unik.

Determinanter

Eksempel (2x2-matrise):

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det A = ad - bc.$$

Egenskaper:

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
2. $\det(A^T) = \det(A)$.

Triangulære matriser: Determinanten er produktet av diagonal-elementene:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Teorem: For en matrise A:

(i) A er inverterbar hvis og bare hvis $\det A \neq 0$.

(ii) Kolonnene i A er lineært uavhengige hvis og bare hvis $\det A \neq 0$.

Eksempel 2

Oppgave

Finn determinanten til

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3i & 2^{10} & -5 \\ 0 & i & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Hint:vurdere hvordan matrisen er relatert til den i (a) for martrisene i (c),(d) og (e).

Eksempel 2 løsning

Løsning:

(a) Kofaktorekspansjon gir

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1\cdot 1 - 1\cdot 3) + 2(-4\cdot 1 - (-2)\cdot 3) \\ &\qquad + 2(-4\cdot 1 - (-2)\cdot 1) \\ &= -2 + 4 - 4 = -2\end{aligned}$$

(b) Dersom vi har en trappematrise så er determinanten bare produktet av tallene langs diagonalen

$$\begin{vmatrix} 3i & 2^{10} & -5 \\ 0 & i & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/3 \end{vmatrix} = 3i \cdot i \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

Eksempel 2 løsning

(c) Vi kan få matrisen gjennom å ta matrisen i deloppgave (a) og multiplisere første raden med 2 og siste raden med -3. Derfor er determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

(d) Vi kan få matrisen gjennom å ta matrisen i deloppgave (a) og bytte rad 2 og 3 og etterpå bytte rad 1 og 2. Derfor er determinanten

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Eksempel 2 løsning

(d) Kofaktorekspansjon langs siste raden gir

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{matrisen i (a)}}$$

$$= -4$$

Eksempel 3

Oppgave

La A være en $n \times n$ matrise som oppfyller $A^k = 0$ for et heltall $k \geq 2$.

(a) Er $A = 0$ den eneste matrisen som oppfyller $A^k = 0$?

Finn følgende:

(b) $\det(A)$

(c) $(I - A)^{-1}$

(d) $\det(I - A)$

Hint: Hva kan vi si om funksjonen $t \mapsto \det(I - tA)$*?*

Eksempel 3 løsning

Løsning:

(a) Nei, et eksempel på en matrise som oppfyller $A^2 = 0$ er $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Vi bruker at

$$0 = \det(0) = \det(A^k) = [\det(A)]^k,$$

som gir at $\det(A) = 0$.

Eksempel 3 løsning

(c) Vi finner at, dersom A kommuterer med I og seg selv, så får vi på samme måte som for vanlige tall at

$$\begin{aligned}(I-A)(I+A+A^2+\ldots+A^{k-1}) &= I+A+A^2+\ldots+A^{k-1}\\ &\quad -A-A^2-\ldots-A^{k-1}-A^k\\ &= I-A^k = I,\end{aligned}$$

så $(I-A)^{-1} = I+A+A^2+\ldots+A^{k-1}$ hvis $A^2=0$.

Eksempel 3 løsning

(d) For funksjonen $f(t) = \det(I - tA)$ gjelder følgende to ting:

1. Fra definisjonen av determinant så er $f(t)$ et polynom.
2. $f(t) \neq 0$ fordi $(I - tA)$ er inverterbar (Inversen er $I + tA + (tA)^2 + \ldots + (tA)^{k-1}$ fra deloppgave (c)).

Dette gjelder selv for $t \in \mathbb{C}$, men da gir disse to egenskapene at $f(t)$ er konstant. Fordi det er minst et $t_0 \in \mathbb{C}$ slik at $f(t_0) = 0$ hvis f er et polynom som ikke er konstant. Fra dette får vi

$$\det(I - A) = f(1) = f(0) = \det(I) = 1.$$