TMA4115 Matematikk 4: Vektorligninger og Matriser

2025 Uke 4

Spennet av Vektorer

- Spennet til en mengde vektorer $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ er mengden av alle lineærkombinasjoner:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, \quad \text{der } c_i \in \mathbb{R} \text{ (eller } \mathbb{C}\text{)}.$$

- Geometriske tolkninger:
  - I $\mathbb{R}^2$, spennet av én vektor danner en linje gjennom origo.
  - I $\mathbb{R}^3$, spennet av to lineært vektorer som ikke er parallelle danner et plan gjennom origo.

Eksempel 1

Oppgave

Hva er spennet av følgende mengder?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(d) Hva kan spennet geometrisk være hvis du har en mengde med 1 vektor? 2 vektorer? 3 vektorer?

Eksempel 1 løsning

Løsning:

(a) Vi prøver å skrive en generell vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i mengden

$$r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Hvis vi bruker Gausseliminasjon for å finne (r, s, t).

Eksempel 1 løsning

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 0 & y \\ 2 & 2 & 5 & z \end{array}\right] \underset{\sim}{R3 \to R3 - 2R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 5 & z - 2x \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R1 \to R1 - R2/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3x-y}{3} \\ 0 & 3 & 0 & y \\ 0 & 0 & 5 & z - 2x \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R2 \to R2/3;\, R3 \to R3/5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3x-y}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z-2x}{5} \end{array}\right]$$

Så løsningen er $r = \frac{3x-y}{3}$, $s = \frac{y}{3}$ og $t = \frac{z-2x}{5}$. Siden løsningen eksisterer er spennet hele rommet $\mathbb{R}^3$.

Eksempel 1 løsning

(b) Vi gjør det samme som i (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 4 & -2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 4 & z \end{array}\right] \underset{\sim}{R2\to R2-4R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -2 & -8 & y-4x \\ 0 & 1 & 4 & z \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R3\leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 4 & z \\ 0 & -2 & -8 & y-4x \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R3\to R3+2R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 4 & z \\ 0 & 0 & 0 & y-4x+2z \end{array}\right].$$

Så vi kan finne en løsning kun hvis $-4x + y + 2z = 0$ og spennet av vektorene er planet gitt av den ligningen.

Eksempel 1 løsning

(c) Vi kan gjøre det samme som i (a) og (b), men her er det mulig å se at vi får vektor to gjennom å multiplisere den første med 2 og vektor tre gjennom å multiplisere den første med -5. Derfor kan vi bare skrive vektorer slik at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dette er parametriseringen av en linje. Gjør vi Gausseliminasjonen får vi ligningene $x + y = 0$ og $z = 0$ som er en annen måte å skrive samme linje.

Eksempel 2

Oppgave

Ligger følgende vektorer i spennet av $\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}$?

(a) $\begin{bmatrix}3\\-3\\3\end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix}5\\-9\\1\end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix}4\\6\\-1\end{bmatrix}$.

Eksempel 2 løsning

Løsning: Det går å løse deloppgavene separat, men det er sannsynlgivis lettere å først finne spennet av vektorene (som en ligning)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & | & x \\ 1 & -3 & | & y \\ 1 & 2 & | & z \end{bmatrix} \underset{\sim}{R2\to 3R2;\, R3\to 3R3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & x \\ 3 & -9 & | & 3y \\ 3 & 6 & | & 3z \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R2\to R2-R1;\, R3\to R3-R1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & x \\ 0 & -10 & | & 3y-x \\ 0 & 5 & | & 3z-x \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R3\to 2R3+R2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & x \\ 0 & -10 & | & 3y-x \\ 0 & 0 & | & -3x+3y+6z \end{bmatrix}$$

Så vi får ligningen $-3x+3y+6z=0$ eller hvis vi deler med -3 får vi den tilsvarande ligningen $x-y-2z=0$.

Eksempel 2 løsning

Nå er det bare å prøve hvis vektorene i deloppgavene oppfyller denne ligningen

(a) $3 - (-3) - 2 \cdot 3 = 3 + 3 - 6 = 0$,

(b) $5 - (-9) - 2 \cdot 1 = 5 + 9 - 2 = 12$,

(c) $4 - 6 - 2 \cdot (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$.

Vektorene i (a) og (c) ligger i spennet, men den i (b) gjør det ikke.

Matriser

- En matrise er et rektangulært oppsett av tall arrangert i rader og kolonner.
- Dimensjoner: En $m \times n$ matrise har m rader og n kolonner.
- Operasjoner:
  - Addisjon og skalarmultiplikasjon utføres elementvis.
  - Matrisemultiplikasjon kombinerer rader, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, i den første matrisen med kolonner, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$, i den andre:

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}.$$

- Spesielle typer matriser:
  - Identitetsmatrise I: Diagonalelementene er 1, alle andre er 0.
  - Nullmatrise 0: Alle elementer er 0.

Eksempel 3

Oppgave

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Finn inversen til

(a) A

(b) B

(c) cA, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(d) $A + B$

(e) AB

Eksempel 3 løsning

Løsning:

(a) Vi bruker Gausseliminasjon

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R2\to R2-R1 \\ R3\to R3-3R1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R2\to -R3 \\ R3\to R2/3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R1\to R1+2R3 \\ R2\to R1+7R3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R1\to R1-R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Eksempel 3 løsning

Så vi finner at inversen til A er

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Igjen kan vi finne svaret ved å bruke Gausseliminasjon

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R1\to -R2 \\ R2\to -R1 \\ R3\to R3-3R2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R3\to -R3-2R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R2\to R2+2R3 \\ R3\to R1-R3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Eksempel 3 løsning

Så inversen til B er

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) Vi bruker at

$$\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)(cA) = \frac{c}{c}A^{-1}A = I = \frac{c}{c}AA^{-1} = (cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)$$

for å finne at

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

Eksempel 3 løsning

(d) det er ingen generell formel som relaterer inversen av summen av matriser til inversen av matrisene selv. Summen trenger ikke engang være inverterbar. F.eks. om A er inverterbar så er $A + (-A)$ summen av to inverterbare matriser som ikke er inverterbar.
I dette tilfellet er $A + B = I$ så

$$(A + B)^{-1} = I^{-1} = I$$

Eksempel 3 løsning

(e) Her kan vi bruke at

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \\ &= AA^{-1} = AIA^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1})\end{aligned}$$

for å finne

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 & -17 & 6 \\ 11 & 25 & -9 \\ 5 & 10 & -3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$