TMA4115 Matematikk 3: Lineære ligningssystemer og Gausseliminasjon

2025 Uke 3

Hva er et lineært ligningssystem?

Definisjon: Et lineært ligningssystem er en samling av ligninger hvor hver ligning er lineær.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Eksempel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ -x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

Hva er et lineært ligningssystem?

Definisjon: Et lineært ligningssystem er en samling av ligninger hvor hver ligning er lineær.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Eksempel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ -x + 6y &= 3 \end{aligned}$$

Geometrisk tolkning: Hver ligning representerer en linje i planet; løsningen er skjæringspunktet.

Gausseliminasjon

Trinn for Gausseliminasjon:

1. Skriv systemet som en utvidet matrise.
2. Bruk radoperasjoner til å oppnå trappeform.
3. Løs systemet ved tilbakesubstitusjon.

Gausseliminasjon

Trinn for Gausseliminasjon:

1. Skriv systemet som en utvidet matrise.
2. Bruk radoperasjoner til å oppnå trappeform.
3. Løs systemet ved tilbakesubstitusjon.

Eksempel:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ -1 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

- **Radoperasjoner:** Bytt rader, skaler en rad, legg multiplum av én rad til en annen.

Eksempel 1

Oppgave: Løs følgende system ved Gausseliminasjon:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 5 \\ 3x + y + z &= 10 \\ 2x + 3y + z &= 12 \end{aligned}$$

Løsning for Eksempel 1

Løsning: Vi starter med matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 3 & 1 & 1 & | & 10 \\ 2 & 3 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}$$

- R2 $\to$ R2 - 3R1: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & 4 & | & -5 \\ 2 & 3 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}$
- R3 $\to$ R3 - 2R1: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & 4 & | & -5 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix}$
- R2 $\leftrightarrow$ -R3 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 \\ 0 & -5 & 4 & | & -5 \end{bmatrix}$

Løsning for Eksempel 1

- R3 → R3 + 5R2: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vert & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vert & -2 \\ 0 & 0 & -11 & \vert & -15 \end{bmatrix}$
- R3 → R3 /(-11): $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vert & 5 \\ 0 & 1 & -3 & \vert & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$
- R2 → R2+3R3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vert & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \frac{23}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \vert & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$
- R2 → R1-2R2+R3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & \frac{24}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \vert & \frac{23}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \vert & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$

Løsningen er $x = \frac{24}{11}, y = \frac{23}{11}, z = \frac{15}{11}$.

Eksempel 2

Oppgave: Finn alle løsninger til systemet:

$$\begin{aligned}(2+i)x + iy &= 3\\ (1+i)x + 3y &= 5\end{aligned}$$

Løsning for Eksempel 2

Løsning: Start med matrisen:

$$\begin{bmatrix} 2+i & i & | & 3 \\ 1+i & 3 & | & 5 \end{bmatrix}$$

- R2 $\rightarrow$ R2 - $\frac{1+i}{2+i}$R1: $\begin{bmatrix} 2+i & i & | & 3 \\ 0 & \frac{16-3i}{5} & | & \frac{16-3i}{5} \end{bmatrix}$
- R2 $\rightarrow$ $\frac{5}{16-3i}$R2 : $\begin{bmatrix} 2+i & i & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$
- R1 $\rightarrow$ R1-iR2 : $\begin{bmatrix} 2+i & 0 & | & 3-i \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$

Løsning for Eksempel 2

- $R1 \to \frac{1}{2+i}R1$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1-i \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$

Så løsningen er: $x = 1 - i, y = 1$.

Eksempel 3

Oppgave: Finn alle løsninger til systemet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - 2y + 4z &= 5 \\ 3x - y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

Løsning for Eksempel 3

Ingen løsning: Vi bruker Gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -2 & 4 & | & 5 \\ 3 & -1 & 5 & | & 1 \end{bmatrix}$$

- R2 → R2 - 2R1: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 \\ 3 & -1 & 5 & | & 1 \end{bmatrix}$
- R3 → R3 - 3R1: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & 2 & | & -5 \end{bmatrix}$
- R3 → R3 - R2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -6 \end{bmatrix}$
- Rad $[0\ 0\ 0 \mid -6]$ tilsvarer ligningen $0 = -6$, så det er ingen løsning.

Eksempel 4

Oppgave: Finn alle løsninger til systemet:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \\ 3x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Løsning for Eksempel 4

Løsning: Vi bruker Gausseliminasjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

- R2 $\to$ R2 - 2R1: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right]$
- R3 $\to$ R3 - 3R1: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
- At både R2 og R3 er $0 = 0$ betyr at vi har to frie variabler.

Løsning for Eksempel 4

Sett $y = s$ og $z = t$:

- $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & s \\ 0 & 0 & 1 & | & t \end{bmatrix}$
- R1+R2-R3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & s-t \\ 0 & 1 & 0 & | & s \\ 0 & 0 & 1 & | & t \end{bmatrix}$

Løsningen er planet gitt ved $x = s - t, y = s, z = t$.

Eksempel 5

Oppgave: Finn alle a slik at systemet ikke har noen løsning:

$$\begin{aligned} x + ay - z &= 0 \\ ax + 2y + 2z &= 2 \\ 4x + 5y + z &= 5 \end{aligned}$$

Løsning for Eksempel 5

Løsning: Vi bruker Gausseliminasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ a & 2 & 2 & | & 2 \\ 4 & 5 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

- R2 $\rightarrow$ R2 - aR1; R3 $\rightarrow$ R3 - 4R1: $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 2+a & | & 2 \\ 0 & 5-4a & 5 & | & 5 \end{bmatrix}$
- R3 $\rightarrow$ R3 - $\frac{5-4a}{2-a^2}$R2: $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & | & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 2+a & | & 2 \\ 0 & 0 & 5-(2+a)\frac{5-4a}{2-a^2} & | & 5-2\frac{5-4a}{2-a^2} \end{bmatrix}$

Løsning for Eksempel 5

- For at systemet skal savne løsning trenger vi

$$5-(2+a)\frac{5-4a}{2-a^2}=0, \tag{1}$$

$$5-2\frac{5-4a}{2-a^2}\neq 0. \tag{2}$$

- Multipliserer vi (1) med $2-a^2$ får vi

$$0=5(2-a^2)-(2+a)(5-4a)=10-5a^2-10-5a+8a+4a^2=3a-a^2$$

med løsninger $a=0$ og $a=3$.

- Hvis vi setter in disse løsningene i (2) får vi $5-2\frac{5-4\cdot 0}{2-0^2}=5-2\frac{5}{2}=0$ for $a=0$ og $5-2\frac{5-4\cdot 3}{2-3^2}=5-2\frac{-7}{-7}=3\neq 0$ for $a=3$. Derfor er $a=3$ det eneste verdiet på a slik at systemet savner løsninger.