

Matematikk 3: Introduksjon & Komplekse tall

2025 uke 2

Velkommen

- Velkommen til emnet Matematikk 3.
- Dette emnet dekker:
 - ▶ Komplekse tall
 - ▶ Lineær algebra
 - ▶ Lineære differensialligninger
- Hovedfokus: Lineær algebra (ca. 70% av emnet).

Oppstartsinformasjon for TMA4115 Matematikk 3

- **Velkommen:** Oppstart i uke 2.
- **Wiki-side:** All informasjon finnes her:
<https://wiki.math.ntnu.no/tma4115/2025v/start>.
- **Undervisning: Omvendt undervisning og interaktive forelesninger.**
 - ▶ Forberedelse: Se relevante videoer før forelesning.
 - ▶ Tider og steder:
 - ★ Tirsdag 10:15–12:00 i S2 (BKJ, MTNANO, MTKOM).
 - ★ Tirsdag 14:15–16:00 i S8 (MTDT, MTIØT).
 - ★ Fredag 14:15–16:00 i S2 (MTFYMA, MTENERG).
- **Plenumsregning:** Onsdag 08:15–10:00 i A1 (Adolf Øien). Starter uke 2.
- **Innleveringer:** 5 av 7 godkjente innleveringer kreves. Levering via Øvsys.
- **Mattelab:** Starter uke 3 i S7.
- **Eksamen:** 16. mai, klokken 09:00.
- **Referansegruppe:** Send e-post til mosolb@ntnu.no for å delta.

Lineære funksjoner og ligninger

- En lineær funksjon i én variabel: $f(x) = ax$.
- En affin funksjon: $f(x) = ax + b$.
- Lineær funksjon med flere variabler:
 - ▶ Eksempel: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.
- Lineære ligninger:
 - ▶ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ der f er lineær.

Oppgave

Hva er den geometriske tolkningen av løsninger for $ax + by + cz = d$?

Systemer av lineære ligninger

- Et system av to ligninger i to ukjente:
 - ▶ Enten én løsning (punkt), ingen løsninger, eller uendelig mange løsninger (linje).
- Representasjon ved matriser:
 - ▶ Koeffisientmatrise og utvidet matrise.

Eksempel

Løs systemet
$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

Vektorer

- Definisjon: Elementer i \mathbb{R}^n .
- Operasjoner:
 - ▶ Addisjon: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
 - ▶ Skalarmultiplikasjon: $c \cdot \mathbf{u}$.
- Geometrisk tolkning:
 - ▶ Piler i to- og tredimensjonale rom.

Oppgave

Illustrer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $3\mathbf{u}$ i et diagram.

Matriseligninger

- En lineær ligning i én variabel: $ax = b$.
- I flere variable kan dette skrives som en matriseligning:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

hvor A er en matrise, \mathbf{x} er en kolonnevektor av ukjente, og \mathbf{b} er en kolonnevektor av konstanter.

- Løsning ved invers matrise (hvis A er inverterbar):

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

- Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Differensialligninger

- Ligning der den ukjente er en funksjon.
- Eksempel: $f'(x) = f(x)$.

Oppgave

Finn løsningen av $f'(x) = 3f(x)$.

Tallsystemets utvikling

- Naturlige tall: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Hele tall: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$
- Rasjonale tall: \mathbb{Q} . $\frac{a}{b}$, der $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
- Reelle tall: \mathbb{R} . Hele tallinjen. Inkluderer tall som $\sqrt{2}$ og π
- Vi kan fortsatt ikke løse $x^2 = -1$. Spørsmålet: Hva er $\sqrt{-1}$?
- Løsning: Innføring av imaginær enhet i , der $i^2 = -1$.

Hva er komplekse tall?

- Komplekse tall, \mathbb{C} , er av typen $z = a + bi$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$.
- Visualisering:
 - ▶ Reelle tall: Tallinje.
 - ▶ Komplekse tall: Komplekst plan.
- Eksempler:
 - ▶ $z = 1 + i$, hvor $a = 1$, $b = 1$.
 - ▶ $w = -3 + 2i$, hvor $a = -3$, $b = 2$.
- a : Realdelen ($\operatorname{Re}(z)$)
- b : Imaginærdelen ($\operatorname{Im}(z)$)

Regneregler for komplekse tall

Teorem

La $z = a + bi$ og $w = c + di$. Da gjelder:

- *Addisjon:* $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- *Subtraksjon:* $z - w = (a - c) + (b - d)i$
- *Multiplikasjon:* $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- *Divisjon:* $\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Eksempel

Eksempel

Legg sammen de komplekse tallene $z_1 = 3 + 4i$ og $z_2 = 1 - 2i$.

Eksempel

Eksempel

Legg sammen de komplekse tallene $z_1 = 3 + 4i$ og $z_2 = 1 - 2i$.

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (3 + 4i) + (1 - 2i) \\ &= (3 + 1) + (4i - 2i) = 4 + 2i\end{aligned}$$

Derfor er summen $4 + 2i$.

Eksempel

Eksempel

Multipliser de komplekse tallene $z_1 = 1 + 2i$ og $z_2 = 3 - 4i$.

Eksempel

Eksempel

Multipliser de komplekse tallene $z_1 = 1 + 2i$ og $z_2 = 3 - 4i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i)(3 - 4i)$$

Bruk distributiv lov:

$$= 1(3 - 4i) + 2i(3 - 4i)$$

$$= 3 - 4i + 6i - 8i^2$$

Husk at $i^2 = -1$, så:

$$= 3 - 4i + 6i + 8 = 11 + 2i$$

Derfor er produktet $11 + 2i$.

Konjugert

Definition

La $z = a + bi$ være et komplekst tall. Da er z *konjugert* gitt som

$$\bar{z} = a - bi.$$

Merk at $z\bar{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall.

Teorem

La $z = a + bi$ og w være komplekse tall. Noen regneregler er:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \qquad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$$

$$z + \bar{z} = 2a \qquad z - \bar{z} = 2bi$$

Polarform

- Skriver $z = re^{i\theta}$.
- $r = |z|$: Absoluttverdien til z .
- $\theta = \arg(z)$: Vinkelen z danner med realaksen.

$$a = \operatorname{Re}z = r \cos \theta$$

$$b = \operatorname{Im}z = r \sin \theta.$$

Litt mer trigonometri gir den andre veien:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{for } a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{for } a < 0 \\ \pi/2 & \text{for } a = 0, b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{for } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Eksempel

Eksempel

Konverter det komplekse tallet $z = 1 + \sqrt{3}i$ til polær form.

Eksempel

Eksempel

Konverter det komplekse tallet $z = 1 + \sqrt{3}i$ til polær form.

For å konvertere $z = a + bi$ til polær form, bruker vi:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{og} \quad \theta = \arg(z) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

For $z = 1 + \sqrt{3}i$, $a = 1$ og $b = \sqrt{3}$.

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right) = \frac{\pi}{3}$$

Dermed er den polære formen:

$$z = re^{i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Eulers formel

Teorem (Eulers formel)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Teorem

La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Da gjelder:

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}$$

Eksempel

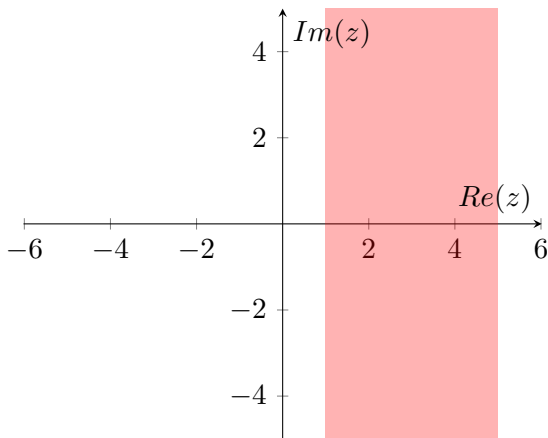
Eksempel

Skisser området i det komplekse planet som tilfredsstiller betingelsen:

$$\operatorname{Re}(z) > 1$$

Dette beskriver området til høyre for linjen $\operatorname{Re}(z) = 1$, som er alle punktene der den reelle delen av z er større enn 1.

Nedenfor er en skisse som viser området som tilfredsstillere $\operatorname{Re}(z) > 1$:



Eksempel

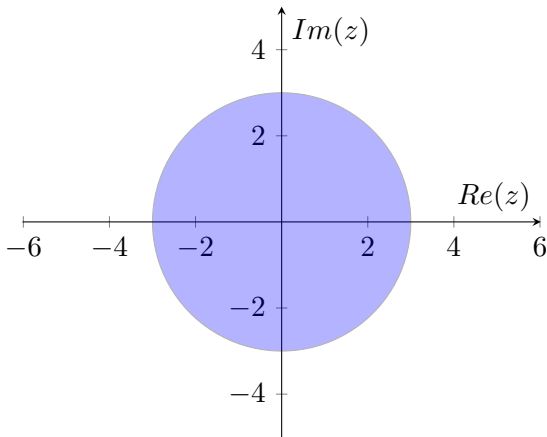
Eksempel

Skisser området i det komplekse planet som tilfredsstiller betingelsen:

$$z\bar{z} \leq 9$$

Dette beskriver en disk med sentrum i origo og radius 3.

Nedenfor er en skisse som viser området som tilfredsstillers $z\bar{z} \leq 9$, altså disken begrenset av sirkelen med radius 3:



Teorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

Eksempler

Eksempel

Finn alle røttene til $z^5 = -1$.

Eksempler

Eksempel

Finn alle røttene til $z^5 = -1$.

- Skriv -1 på polarform: $-1 = e^{i\pi}$.
- Femterøttene: $z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/5}$ for $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Løsningene er jevnt fordelt på en sirkel.