TMA4115 Matematikk 3

Uke 14, V2025

Andre ordens differensialligninger

Institutt for matematiske fag
NTNU, Trondheim

April 1, 2025

Sammendrag Uke 13

Første ordens, lineære, homogene differensialligninger med konstante koeffisienter

Anta at den konstante $n \times n$-matrisen $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ har n lineært uavhengige egenvektorer $u_1, u_2, \ldots, u_n$. La λ_i være egenverdien som tilsvarer u_i. Da er

$$\{u_1 e^{\lambda_1 t}, u_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, u_n e^{\lambda_n t}\}$$

et fundamentalt løsningssett på $t \in]-\infty, \infty[$ for det homogene systemet

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Følgelig er en generell løsning gitt ved

$$x(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n u_n e^{\lambda_n t}$$

hvor $c_1, \ldots, c_n$ er vilkårlige konstanter.

Sammendrag Uke 13 (System av differensialligninger)

Forrige uke vurderte vi først og fremst

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)\end{aligned} \xrightarrow{\dot{x}=Ax} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Eksempel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - 3x_2\\ \dot{x}_2 &= 1x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Matrisen til systemet:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Karakteristiske polynomet

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 1 = 0$$

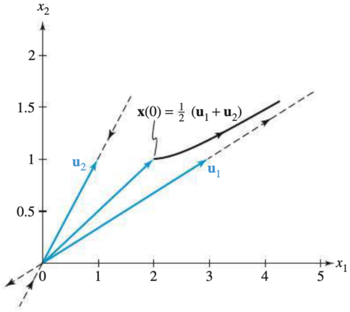
Sammendrag Uke 13

Egenverdiene: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. For å finne egenvektorene, må vi løse

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siden u_1 og u_2 er lineært uavhengige, følger det at en generell løsning er

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$



Sammendrag Uke 13

Hvis A har komplekse konjugerte egenverdier $\alpha \pm i\beta$ og tilhørende egenvektorer $z = a \pm ib$, der $\mathrm{Re}(z) = a$ og $\mathrm{Im}(z) = b$ er reelle vektorer, så er to lineært uavhengige reelle vektorløsninger til det homogene systemet

$$e^{\alpha t} \cos \beta t\, a - e^{\alpha t} \sin \beta t\, b, \quad e^{\alpha t} \sin \beta t\, a + e^{\alpha t} \cos \beta t\, b.$$

Første ordens, lineære, inhomogene differensialligninger med konstante koeffisienter

Hvis $x_p(t)$ er en partikulær løsning av

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),$$

så er en generell løsning gitt av

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

hvor $x_h(t)$ er en generell løsning av den tilhørende homogene ligningen

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Sammendrag Uke 13

Eksempel: Finn en generell løsning på

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + tg$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad g = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning til det tilsvarende homogene systemet $\dot{x} = Ax$ er

$$x_h(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi søker en partikulær løsning av formen

$$x_p(t) = ta + b = t \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Ved å sette dette uttrykket inn i systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + tg$ får vi

$$a = A(ta + b) + tg,$$

som kan skrives som

$$t(Aa + g) + (Ab - a) = 0.$$

Ved å sette "koeffisientene" til dette vektor-polynomet lik null får vi:

$$\begin{aligned} Aa &= -g, \\ Ab &= a. \end{aligned}$$

Ved hjelp av Gauss-eliminasjon finner vi: $a = (5, 2, 4)^\top$ og $b = (1, 0, 2)^\top$. Dermed er en partikulær løsning til $\dot{x}(t) = Ax(t) + tg$

$$x_p(t) = ta + b = t \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t + 1 \\ 2t \\ 4t + 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Sammendrag Andre ordens differensialligninger (Uke 14)

2. ordens differensialligninger med konstante koeffisienter

En 2. ordens differensialligning med konstante koeffisienter har formen:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t) \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

med spesialtilfellet der funksjonen $f(t)$ er null:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \tag{2}$$

- a, b, c er konstante reelle tall,
- $x(t)$ er den ukjente funksjonen,
- $f(t)$ er en gitt funksjon (kan være null eller ikke-null).

Ligning (2) kalles den *homogene formen* av ligning (1).

Sammendrag Andre ordens differensialligninger

Vi definerer nye variabler for å redusere ordenen:

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t)$$

Da får vi:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{a}\left(f(t) - bx_2(t) - cx_1(t)\right)$$

Det resulterende systemet blir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{a}(f(t) - bx_2 - cx_1) \end{cases}$$

Eller på vektorform:

$$\dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{a}(f(t) - bx_2 - cx_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} f(t) \end{bmatrix}$$

Sammendrag Andre ordens differensialligninger

Merk: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Eller sett inn $\exp(\lambda t)$ i differensialligningen $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$:

$$a\frac{d^2}{dt^2}\exp(\lambda t) + b\frac{d}{dt}\exp(\lambda t) + c\exp(\lambda t) = \exp(\lambda t)\Big(a\lambda^2 + b\lambda + c\Big) = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Det er det karakteristiske polynomet tilknyttet den homogene ligningen $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$.

Sammendrag Andre ordens differensialligninger

Representasjon av løsninger for initialverdiproblemet

Hvis $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er to løsninger av differensiallikningen $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$ som er lineært uavhengige på $]-\infty, \infty[$, så kan det alltid finnes unike konstanter c_1 og c_2 slik at $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ oppfyller initialverdiproblemet

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \quad x(t_0) = X_0 \quad \dot{x}(t_0) = X_1$$

på $]-\infty, \infty[$.

Merk: (Lineær uavhengighet for to funksjoner) Et par funksjoner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ sies å være lineært uavhengige på intervallet I hvis og bare hvis ingen av dem er en konstant multiplikasjon av den andre på hele I. Vi sier at x_1 og x_2 er lineært avhengige på I hvis én av dem er en konstant multiplikasjon av den andre på hele I.

Sammendrag Andre ordens differensialligninger

Den generelle løsningen

Den generelle løsningen av $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$ finnes direkte fra røttene til $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Det er tre tilfeller å vurdere:

- λ_1 og λ_2 er begge reelle og forskjellige. To lineært uavhengige løsninger er $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$, og den generelle løsningen er

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

I spesialtilfellet $\lambda_2 = -\lambda_1$, kan denne løsningen omskrives som

$$x(t) = k_1 \cosh(\lambda_1 t) + k_2 \sinh(\lambda_2 t)$$

Merk:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Sammendrag Andre ordens differensialligninger

- $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, et komplekst tall. Siden a_1 og a_0 antas å være reelle, må røttene i $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ opptre i konjugerte par. Den andre roten blir derfor $\lambda_2 = a - i\beta$. To lineært uavhengige løsninger er $e^{(\alpha+i\beta)t}$ og $e^{(\alpha-i\beta)t}$, og den generelle komplekse løsningen er

$$x(t) = d_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + d_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

  som er ekvivalent med $x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

- $\lambda_1 = \lambda_2$. To lineært uavhengige løsninger er $e^{\lambda t}$ og $te^{\lambda t}$, og den generelle løsningen er

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Inhomogene ligninger: Alle løsninger til den inhomogene ligningen $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$ er på formen $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ der $x_p(t)$ er en partikulær løsning og $x_h(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligningen $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$.

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

A) Løs initialverdiproblemet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

Løsning: Den karakteristiske ligningen er

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Ved å bruke den kvadratiske formelen

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

finner vi at røttene til denne ligningen er

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Den gitte differensialligningen har derfor løsninger på formen

$$x(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

For å finne den spesifikke løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene, deriverer vi først x og setter så inn både x og $\dot{x}$ i initialbetingelsene:

$$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2,$$

$$\dot{x}(0) = (-1+\sqrt{2})c_1 e^0 + (-1-\sqrt{2})c_2 e^0 = (-1+\sqrt{2})c_1 + (-1-\sqrt{2})c_2.$$

Dette gir ligningssystemet:

$$0 = c_1 + c_2,$$

$$-1 = (-1+\sqrt{2})c_1 + (-1-\sqrt{2})c_2.$$

Ved å løse systemet finner vi $c_1 = -\sqrt{2}/4$ og $c_2 = \sqrt{2}/4$. Dermed er løsningen

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1+\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1-\sqrt{2})t},$$

som er den ønskede løsningen.

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

B) Finn den andre ordens differensialligningen for $x_1(t)$ fra det første ordens systemet:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{17}{16} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Løsning:

Ved å bruke (3) finner vi

$$x_2 = \dot{x}_1 - \frac{1}{4}x_1.$$

Dette impliserer at

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \frac{1}{4}\dot{x}_1 = -\frac{17}{16}x_1 + \frac{3}{4}\dot{x}_1 - \frac{3}{16}x_1,$$

slik at

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 + \frac{5}{4}x_1 = 0.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

C) Finn en løsning til initialverdiproblemet

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 3. \tag{4}$$

Løsning: Den karakteristiske ligningen for (4) er

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0.$$

Siden $\lambda = -2$ er en dobbeltrot, sier teoremet i kursnotatene at (4) har løsningene $x_1 = e^{-2t}$ og $x_2 = te^{-2t}$.
La oss bekrefte at $x_2(t)$ er en løsning:

$$x_2(t) = te^{-2t}, \quad \dot{x}_2(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t},$$

$$\ddot{x}_2(t) = -2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4te^{-2t} = -4e^{-2t} + 4te^{-2t},$$

$$\ddot{x}_2 + 4\dot{x}_2 + 4\dot{x}_2 = -4e^{-2t} + 4te^{-2t} + 4\left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right) + 4te^{-2t} = 0.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

Videre ser vi at e^{-2t} og te^{-2t} er lineært uavhengige, siden ingen er en konstant multiplum av den andre på $(-\infty, \infty)$.

Til slutt setter vi inn den generelle løsningen $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$ i initialbetingelsene:

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 = 1, \quad y'(0) = -2c_1 e^0 + c_2 e^0 - 2c_2(0)e^0 = 3,$$

og vi løser for å finne $c_1 = 1$, $c_2 = 5$. Dermed er

$$y = e^{-2t} + 5te^{-2t}$$

den ønskede løsningen.

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

D) Vis at følgende *Teorem*: La $x(t) = u(t) + iv(t)$ være en løsning til likning

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \tag{5}$$

der a, b og c er reelle tall. Da er den reelle delen $u(t)$ og den imaginære delen $v(t)$ reell-verdige løsninger av (5).

Løsning: Generelt, hvis $z(t)$ er en kompleksverdi funksjon av den reelle variabelen t, kan vi skrive $z(t) = u(t) + iv(t)$, der $u(t)$ og $v(t)$ er reell-verdige funksjoner. Derivertene av $z(t)$ er da gitt ved

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} + i\frac{d^2v}{dt^2}.$$

Ifølge antakelsen er $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, og dermed

$$a(\ddot{u} + i\ddot{v}) + b(\dot{u} + i\dot{v}) + c(u + iv) = 0,$$
$$(a\ddot{u} + b\dot{u} + cu) + i(a\ddot{v} + b\dot{v} + cv) = 0.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

Men et komplekst tall er null hvis og bare hvis både den reelle og den imaginære delen er null. Dermed må vi ha

$$a\ddot{u} + b\dot{v} + cu = 0 \quad \text{og} \quad a\ddot{v} + b\dot{v} + cv = 0,$$

som betyr at både $u(t)$ og $v(t)$ er reell-verdige løsninger av (5).

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

E) Forelesningsnotatene diskuterer mekanikken til masse-fjær-oscillatoren, og vi så hvordan Newtons andre lov impliserer at posisjonen $x(t)$ til massen m styres av den andreordens differensialligningen

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

der termene er fysisk identifisert som

$$[\text{inerti}]\ddot{x}(t) + [\text{demping}]\dot{x}(t) + [\text{stivhet}]x(t) = 0.$$

Finn en løsning til bevegelsesligningen for et fjærsystem når $m = 36\,\text{kg}$, $b = 12\,\text{kg/s}$, $k = 37\,\text{kg/s}^2$, $x(0) = 0.7\,\text{m}$, og $\dot{x}(0) = 0.1\,\text{m/s}$.

Løsning: Bevegelsesligningen er gitt ved $x(t)$, løsningen av initialverdiproblemet for de spesifikke verdiene av $m, b, k, x(0)$ og $\dot{x}(0)$. Det vil si, vi søker løsningen til

$$36\ddot{x}(t) + 12\dot{x}(t) + 37x = 0; \quad y(0) = 0.7, \quad \dot{x}(0) = 0.1.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

Den karakteristiske ligningen er

$$36\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0,$$

som har røttene

$$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(36)(37)}}{72} = \frac{-12 \pm 12\sqrt{1-37}}{72} = -\frac{1}{6} \pm i.$$

Dermed, med $\alpha = -1/6$, $\beta = 1$, kan forskyvningen $x(t)$ uttrykkes som

$$x(t) = c_1 e^{-t/6} \cos t + c_2 e^{-t/6} \sin t.$$

Vi kan finne c_1 og c_2 ved å sette inn $x(t)$ og $\dot{x}(t)$ i initialbetingelsene. Vi får en formel for $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \left(-\frac{c_1}{6} + c_2\right) e^{-t/6} \cos t + \left(-c_1 - \frac{c_2}{6}\right) e^{-t/6} \sin t.$$

Ved å bruke initialbetingelsene får vi følgende system:

$$c_1 = 0.7, \qquad -\frac{c_1}{6} + c_2 = 0.1.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

Ved å løse systemet finner vi at $c_1 = 0.7$ og $c_2 = 1.3/6$. Med disse verdiene blir bevegelsesligningen:

$$y(t) = 0.7e^{-t/6}\cos t + \frac{1.3}{6}e^{-t/6}\sin t.$$

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

F) Vis at følgende *Teorem*: Hvis $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er to løsninger av differen- sialligningen

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0 \tag{6}$$

som er lineært uavhengige på $]-\infty, \infty[$, så finnes det alltid entydige konstanter c_1 og c_2 slik at $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ oppfyller initialverdiproblemet

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0, \quad x(t_0) = X_0, \quad \dot{x}(t_0) = X_1$$

på $(-\infty, \infty)$.

Bruk følgende *Lemma*: For alle reelle tall a $(\neq 0)$, b, og c, dersom $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er to løsninger av differensialligningen (6) på $]-\infty, \infty[$, og dersom likningen

$$x_1(\tau)\dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_1(\tau)x_2(\tau) = 0 \tag{7}$$

holder for et hvilket som helst punkt τ, så er x_1 og x_2 lineært avhengige på $]-\infty, \infty[$. (Uttrykket på venstre side av (7) kalles *Wronskianen* til x_1 og x_2 i punktet τ.)

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

Løsning: Vi vet allerede at $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ er en løsning av

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

Vi må vise at c_1 og c_2 kan velges slik at

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = X_0$$

og

$$\dot{x}(t_0) = c_1 \dot{x}_1(t_0) + c_2 \dot{x}_2(t_0) = X_1.$$

Men enkel algebra viser at dette ligningssystemet har løsningen

$$c_1 = \frac{X_0 \dot{x}_2(t_0) - X_1 x_2(t_0)}{x_1(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0)x_2(t_0)} \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{X_1 \dot{x}_1(t_0) - X_0 \dot{x}_1(t_0)}{x_1(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0)\dot{x}_2(t_0)}.$$

(for å løse for c_1, for eksempel, multipliser den første ligningen med $\dot{x}_2(t_0)$ og den andre med $x_2(t_0)$, og trekk fra.) Så lenge nevneren er ulik null, garanterer det tekniske lemmaet at denne betingelsen er oppfylt.

Oppgaver Andre ordens differensialligninger

G) Finn en partikulær løsning til

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 3t.$$

Løsning: Vi må finne en funksjon $x(t)$ slik at kombinasjonen $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$ er en lineær funksjon av t — nemlig, $3t$. Nå, hva slags funksjon "ender opp" som en lineær funksjon etter å ha tatt med nullte, første og andrederivert? Et umiddelbart svar er: *en annen lineær funksjon*. Så vi prøver med $x_1(t) = At$ og forsøker å matche opp $\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1$ med $3t$. Kanskje du ser at dette ikke fungerer: $x_1 = At$, $\dot{x}_1 = A$, og $\ddot{x}_1 = 0$ gir oss

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 3A + 2At,$$

og for at dette skal være lik $3t$, krever vi både at $A = 0$ og $A = 3/2$. Vi har bedre hell hvis vi legger til et konstantledd til prøvefunksjonen: $x_2(t) = At + B$. Da er $\dot{x}_2 = A$, $\ddot{x}_2 = 0$, og $\ddot{x}_2 + 3\dot{x}_2 + 2x_2 = 3A + 2(At + B) = 2At + (3A + 2B)$, som matcher opp med $3t$ dersom $2A = 3$ og $3A + 2B = 0$. Å løse dette systemet gir $A = 3/2$ og $B = -9/4$. Dermed er funksjonen $x_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}$ en løsning til $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x$.