TMA4115 Matematikk 3

Uke 13, V2025

System av differensialligninger

Institutt for matematiske fag
NTNU, Trondheim

March 25, 2025

Sammendrag Uke 12 (Interpolasjon, regresjon og markovkjeder)

Minste kvadraters metode

La A være en $m \times n$-matrise. Vi husker fra tidligere at $Ax = b$ har løsning bare når b ligger i kolonnerommet til A. Hvis ikke, så ønsker vi å finne en omtrentlig løsning (som er nærmest mulig en faktisk løsning).

Så hvis $b \notin \mathrm{Col}(A)$, så vil vi finne en vektor $\hat{x}$ slik at $||A\hat{x} - b||$ er så liten som mulig.

Dette oppnår vi når $A\hat{x} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{Col}(A)}(b)$, eller med andre ord når

$$(A\hat{x} - b) \in (\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Null}(A^{\mathsf{T}}).$$

Altså må

$$A^{\mathsf{T}}(A\hat{x} - b) = 0,$$

eller

$$A^{\mathsf{T}}A\hat{x} = A^{\mathsf{T}}b.$$

Sammendrag Uke 12

Interpolasjon og regresjon

Hvis vi har $m+1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der x_i-ene er ulike kan vi alltid finne et (unikt!) polynom

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

der $p(x_i) = y_i$ for alle i hvor $1 \leq i \leq m+1$.

Regresjon

Dersom vi for eksempel har tre eller flere punkter kan vi ikke nødvendigvis finne en rett linje som går gjennom alle punktene (med mindre punktene tilfeldigvis ligger på en rett linje). Da kan vi bruke minste kvadraters metode til å finne en linje

$$p(x) = ax + b$$

som passer best mulig.

Eller mer generelt et m-tegradspolynom som passer best mulig hvis vi har mer enn $m+1$ punkter.

Sammendrag Uke 12

Eksempel: Vi skal finne polynomer som passer til punktene $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$.

Løsning: Det finnes et unikt tredjegradspolynom som går gjennom alle punk- tene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet, og finn koeffisientene. Da

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

skal gå gjennom alle disse punktene, får vi følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} p(0) &= d = 1 \\ p(1) &= a + b + c + d = -1 \\ p(2) &= 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ p(3) &= 27a + 9b + 3c + d = 1 \end{aligned} \xrightarrow{Ax=b} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ved bruk av Gausseliminasjon finner vi $x = [-3/2, 7, -15/2, 1]^T$

$$p(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 7x^2 - \frac{15}{2}x + 1$$

Sammendrag Uke 12

Eksempel: Bruk minste kvadraters metode til å finne andregradspolynom som passer best til punktene $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$.

Løsning: Vi ønsker å finne et polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som best passer punktene.
Systemet er:

$$\begin{aligned} p(0) &= c = 1 \\ p(1) &= a + b + c = -1 \\ p(2) &= 4a + 2b + c = 2 \\ p(3) &= 9a + 3b + c = 1 \end{aligned} \xrightarrow{Ax=b} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normal-ligninger: $A^T Ax = A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Løsning: $x = [0.25, -0.45, 0.55]^T$

$$p(x) = 0.25x^2 - 0.45x + 0.55$$

Sammendrag Uke 12

Markovkjeder

En vektor $v \in \mathbb{R}^n$ kalles en *sannsynlighetsvektor* dersom alle koordinatene er større enn eller lik 0 og summen av koordinatene er lik 1.

En $n \times n$-matrise M hvor alle kolonnene er sannsynlighetsvektorer kalles en *stokastisk matrise*. Hvis M er en stokastisk matrise og x_0 en sannsynlighetsvektor, så er følgen $\{x_i = M^i x_0\}_{i \geq 0}$ en *Markovkjede*.

En egenvektor for M som hører til egenverdien 1, og som i tillegg er en sannsynlighetsvektor, kalles en *likevektsvektor*. En likevektsvektor q har egenskapen at

$$Mq = q.$$

En stokastisk matrise M er *regulær* dersom det finnes et heltall $k \geq 1$ slik at alle elementene i M^k er større enn null.

Dersom M er regulær vil likevektsvektoren være unik.

Sammendrag Uke 12

Eksempel: a) Finn likevektsvektoren til den stokastiske matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

b) Finne $\lim_{k\to\infty} M^k x_0$ for $x_0 = [0.5, 0.4, 0.1]^T$.

Løsning: a) Merk at M er regulær. Egenvektor til egenverdi $\lambda = 1$ er

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad q = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Mq = q.$$

b) M har følgende diagonalisering $M = SDS^{-1}$:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 3 \\ 0 & -1.5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ S^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 2/5 & -4/15 & 2/5 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}$$

Sammendrag Uke 12

Startvektor:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

M har egenverdier 0.2, 0.5, 1 og tilhørend egenvektorer:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da u_1, u_2, u_3 er basisen i $\mathbb{R}^3$, finnes $c = [c_1, c_2, c_3]^\mathsf{T}$ ($S^{-1}x_0 = c$) slik at

$$x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \quad \Rightarrow \quad M^k x_0 = c_1 (0.2)^k u_1 + c_2 (0.5)^k u_2 + c_3 u_3$$

$$\lim_{k \to \infty} M^k x_0 = c_3 u_3 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = q$$

Sammendrag System av differensialligninger

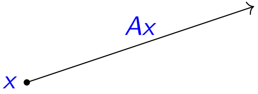
- En *vektorfunksjon* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]^\mathsf{T}$ er en kurve i $\mathbb{R}^n$. Vektorfunksjoner utgjør et $\mathbb{R}$-vektorrom.
- Den *deriverte* av en vektorfunksjon $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ er lik vektorfunksjonen gitt ved å derivere hver komponent $y'(t) = [y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t)]^\mathsf{T}$.
- Et *førsteordens lineært og homogent system av differensialligninger med konstante koeffisienter* er et sett med n ligninger og n ukjente funksjoner

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \textstyle\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \textstyle\sum_{j=1}^n a_{nj} y_j(t) \end{aligned} \quad \xrightarrow{y'=Ay} \quad \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

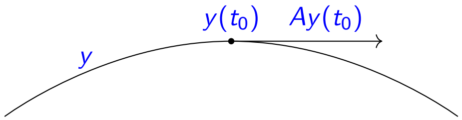
- Løsningene til $y' = Ay$ utgjør et vektorrom. Dersom y_1 og y_2 er løsninger av systemet, så er $c_1 y_1 + c_2 y_2$ en løsning for alle reelle tall c_1 og c_2.
- La A være en diagonaliserbar $n \times n$-matrise. Hvis v_1, ..., v_n er n lineært uavhengige egenvektorer med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så er $\{v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t}\}$, en basis for løsningsrommet til $y' = Ay$. Med andre ord en generell løsning av $y' = Ay$ er $\sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t}$

Sammendrag System av differensialligninger

Vektorfelt: Vi tenker på Ax som en pil med x som startpunkt



En løsning y av $y' = Ay$ er en kurve som tilfredstiller at den deriverte i et tidspunkt t_0 er gitt som $y'(t_0) = Ay(t_0)$. Den deriverte er – med andre ord – pilen i $y(t_0)$ fra vektorfeltet assosiert med A.

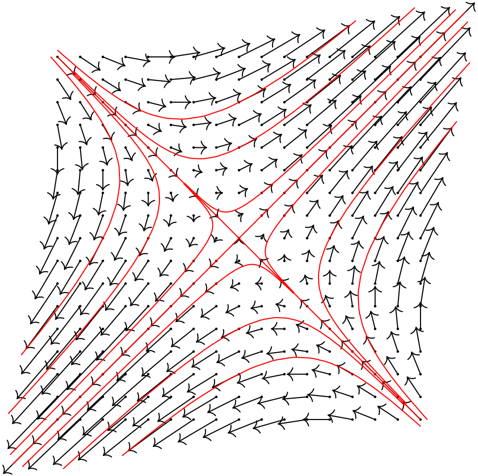


Pilen $Ay(t_0)$ er den deriverte til y i $t = t_0$

Derfor tangerer pilene løsningskurvene.

Sammendrag System av differensialligninger

Her er en skisse av vektorfeltet assosiert til systemet med $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ med noen kurver som tangerer pilene i vektorfeltet til A for å få et fasediagram (rødt):



Sammendrag System av differensialligninger

- Et *initialverdiproblem* er et system sammen med en initialbetingelse $y(t_0) = y_0$ hvor t_0 er et reelt tall og y_0 er en vektor i $\mathbb{R}^n$.

- Et initialverdiproblem $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$ har en entydig/unik løsning.

Todimensjonale system

1. to forskjellige relle røtter (A er reelt diagonaliserbar);
2. to komplekse røtter, men ingen reelle røtter;
3. én reell rot.

- Anta at $\alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, er en kompleks egenverdi til A og la v være en tilhørende kompleks egenvektor. Så danner $y_1(t) = e^{\alpha t}\big(\mathrm{Re}(v)\cos(\beta t)$ - $\mathrm{Im}(v)\sin(\beta t)\big)$ og $y_2(t) = e^{\alpha t}(\mathrm{Re}(v)\sin(\beta t) + \mathrm{Im}(v)\cos(\beta t))$ en basis for det reelle løsningsrommet til $y' = Ay$

- La A være en reell 2×2-matrise med reell egenverdi λ med algebraisk multiplisitet 2. La v være en egenvektor til λ, og la w være en vektor som oppfyller $(A - \lambda I)w = v$. Da er løsningene til systemet $y' = Ay$ på formen $y(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t}(tv + w)$.

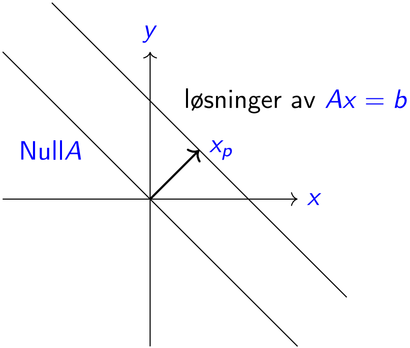
Sammendrag System av differensialligninger

Inhomogene system

• Løsningene til *homogen* ligning: $Ax = 0$ er et vektorrom, nemlig nullrommet til A, eller *kjernen til lineærtransformasjonen* $T(x) = Ax$.

• Løsningene til *inhomogen* ligning: $Ax = b (\neq 0)$ er ikke et vektorrom.

Alle løsninger på $Ax = b$ er på formen $x_h + x_p$ hvor x_h er en vilkårlig vektor i nullrommet til A og x_p er en spesifikk løsning av $Ax = b$.



Oppgaver System av differensialligninger

Merk at

$$T(y(t)) = y'(t) - Ay(t)$$

er en lineærtransformasjon ettersom derivasjon og matrisemultiplikasjon er lineære operasjoner. *Kjernen til denne lineærtransformasjonen* er nøyaktig løsningene av systemet $y' = Ay$. Derfor blir det korrekt å kalle denne ligningen *homogen*.

Den *inhomogene* ligningen svarer til å legge til en vektor $b = f(t)$ på høyre side:

$$T(y(t)) = f(t)$$

Eller ekvivalent:

$$y'(t) = Ay(t) + f(t)$$

	$\mathbb{R}^n$	vektorfunksjoner
homogen	$Ax = 0$	$y'(t) = Ay(t)$
inhomogen	$Ax = b$	$y'(t) = Ay(t) + f(t)$

Oppgaver System av differensialligninger

En spesifikk løsning av

$$y'(t) = Ay(t) + f(t)$$

kalles en *partikulær løsning*. En beskrivelse av alle løsninger kalles fortsatt en *generell løsning*.

- Hvis $y_p(t)$ er en partikulær løsning av inhomogen ligningen

$$y'(t) = Ay(t) + f(t),$$

så er en generell løsning gitt av

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

hvor $y_h(t)$ er en generell løsning av den tilhørende homogene ligningen.

Oppgaver System av differensialligninger

A1) Finn generell løsning av $x'(t) = Ax(t)$ når

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A2) Gjør en variabelendring som dekoblerer likningen $x' = Ax$.
Skriv likningen

$$x(t) = Py(t)$$

og vis utregningen som fører til det ukoblede systemet

$$y' = Dy,$$

og spesifiser P og D.

Oppgaver System av differensialligninger

Losning A1):

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \lambda^2 - 10\lambda + 24 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0. \end{aligned}$$

Egenverdier: 4 og 6.

$$\left(\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $x_1 = (1/3)x_2$ med x_2 fri. Sett $x_2 = 3$ og $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Oppgaver System av differensialligninger

For $\lambda = 6$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $x_1 = x_2$ med x_2 fri. Sett $x_2 = 1$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For initialbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, finn c_1 og c_2 slik at $c_1 v_1 + c_2 v_2 = x(0)$:

$$[v_1 \quad v_2 \quad x(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

Altså er $c_1 = -1/2$, $c_2 = 7/2$, og

$$x(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

Losning A2): $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, med egenvektorer $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som tilsvarer egenverdiene 4 og 6 henholdsvis.

For å dekoble ligningen $x' = Ax$, sett

$$P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

og la

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

slik at

$$A = PDP^{-1} \quad \text{og} \quad D = P^{-1}AP.$$

Oppgaver System av differensialligninger

Ved å sette $x(t) = Py(t)$ inn i $x' = Ax$ får vi:

$$\frac{d}{dt}(Py) = A(Py) = PDP^{-1}(Py) = PDy.$$

Siden P har konstante elementer, gjelder det at

$$\frac{d}{dt}(Py) = P\left(\frac{d}{dt}y\right),$$

slik at venstresiden kan skrives som

$$P\left(\frac{d}{dt}y\right) = PDy.$$

Ved å venstremultiplisere med P^{-1} får vi:

$$y' = Dy, \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

B) Finn generell løsning av $y' = Ay$ når

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Losning B): Vi finner først egenverdiene ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet $\det(\lambda I - A)$, dvs. løse ligningen $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 6 & 11 & -16 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 4 & 5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}\right) &= (\lambda + 6) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 5 & 4 \\ 5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}\right) \\
&- 11 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & \lambda - 10 \end{bmatrix}\right) \\
&+ (-16) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2 & \lambda - 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) \\
&= \lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0.
\end{aligned}$$

Oppgaver System av differensialligninger

$\lambda_1 = 2$ er en løsning av ligningen (og dermed en egenverdi). Dermed må $(\lambda - 2)$ være en faktor i $\det(\lambda I - A)$. Polynomdivisjon gir

$$(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 7\lambda + 12.$$

Vi finner nullpunktene til $\lambda^2 - 7\lambda + 12$ ved hjelp av abc-formelen:

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{(7^2 - 4 \cdot 12)}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Dermed er de to siste egenverdiene

$$\lambda_2 = \frac{7-1}{2} = 3 \text{ og } \lambda_3 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Vi finner så egenvektorene på vanlig måte, ved å løse ligningen

$$(\lambda I - A)x = 0$$

for hver verdi av λ.

Oppgaver System av differensialligninger

$\lambda_1 = 2$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 11 & -16 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$x = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og en passende egenvektor er

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

$\lambda_2 = 3$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 11 & -16 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$x = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og en passende egenvektor er

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

$\lambda_3 = 4$ gir et system med totalmatrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 11 & -16 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Så løsningen er

$$x = s \cdot \begin{bmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For å unngå brøker lar vi $s = 3$ og sier at en passende egenvektor er

$$v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

Dermed er en generell løsning gitt ved

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

C1) Finn en basis for løsningsrommet til $y' = By$ og bestem generell løsning når

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

C2) Vis at systemet $y' = By$ med en gitt initialverdi $y(0) = y_0$ har en entydig løsning. Du kan anta at løsningsrommet er tredimensjonalt.

Losning C1): En generell løsning til systemet $y' = By$ når B er en $n \times n$-matrise er på formen

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t},$$

der λ_i-ene er egenverdiene til B og v_i-ene er tilhørende egenvektorer. En basis for løsningsrommet er vektorene

$$v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, v_n e^{\lambda_n t}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

Vi finner egenverdier ved å finne røttene til det karakteristiske polynomet til B, altså løse ligningen $\det(B - \lambda I) = 0$. Egenvektor(er) tilhørende egenverdi λ_i finner vi ved å løse $(B - \lambda_i I)v = 0$.
Under gir vi løsningen på hver deloppgave.

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

Losning C2): Vi har sett at den generelle løsningen er

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}.$$

Oppgaver System av differensialligninger

Det gjenstår kun å bestemme koeffisientene fra initialverdiene:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = y_0.$$

Dette kan skrives som en matriselikning

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} c = y_0 \qquad \text{hvor} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Du kan sjekke at denne matrisen er inverterbar. Dermed er det et entydig valg av koeffisienter c_1, c_2 og c_3; løsningen er dermed entydig ettersom den generelle løsningen inneholder alle løsninger.

Oppgaver System av differensialligninger

D1) Finn den generelle løsningen til systemet av lineære ordinære differensiallikninger og skisser fasediagramet.

D1a) $\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$

D1b) $\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = 4y_1 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0$

D1c) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$ $\quad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0$

D2) Finn deretter løsningen for den gitte initialverdien og marker den tilsvarende kurven i fasediagrammet.

Oppgaver System av differensialligninger

Losning D1a: Matrisa til systemet er:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 2 \text{ og } \lambda = -2$$

og de tilhørende (reelle) egenvektorene:

$$\lambda = 2:$$

$$(A - 2I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} v = 0 \iff v = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = -2:$$

$$(A + 2I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} v = 0 \iff v = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

Oppgaver System av differensialligninger

Den generelle løsningen av systemet er gitt ved

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Losning D2a: Vi finner nå løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$:

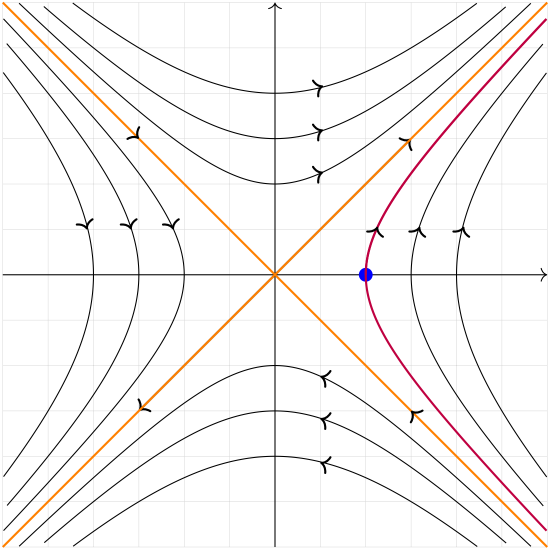
$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\iff c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

Løsningen vi leter etter er

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Oppgaver System av differensialligninger

Fasediagram (løsningen av initialverdiproblemet er markert lilla):



Oppgaver System av differensialligninger

Losning D1b: Matrisa til systemet er

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 2i \text{ og } \lambda = -2i$$

og de tilhørende egenvektorene. $\lambda = 2i$:

$$(A - 2iI)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix} v = 0 \iff v = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{C}$$

Vi har

$$\mathrm{Re}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(\lambda) = 2$$

Oppgaver System av differensialligninger

Den generelle løsningen av systemet er gitt ved

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}$$

Vi finner nå løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$:

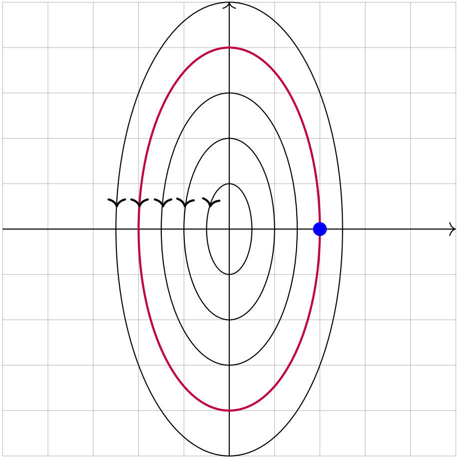
$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c_1 = 1,\ c_2 = 0$$

Løsningen vi leter etter er

$$y(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix}$$

Oppgaver System av differensialligninger

Fasediagram (løsningen av initialverdiproblemet er markert lilla):



Oppgaver System av differensialligninger

Losning D1c: Matrisa til systemet er

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beregner egenverdiene:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 1 + 2i$$
$$text og \; \lambda = 1 - 2i$$

og de tilhørende (reelle) egenvektorene.
$\lambda = 1 + 2i$:

$$(A - (1+2i)I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{bmatrix} v = 0$$
$$\iff v = t \cdot \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{C}$$

Oppgaver System av differensialligninger

Vi har

$$\mathrm{Re}(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(v) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(\lambda) = 2$$

Den generelle løsningen av systemet er gitt ved

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} e^t$$

Vi finner nå løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsen: $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$:

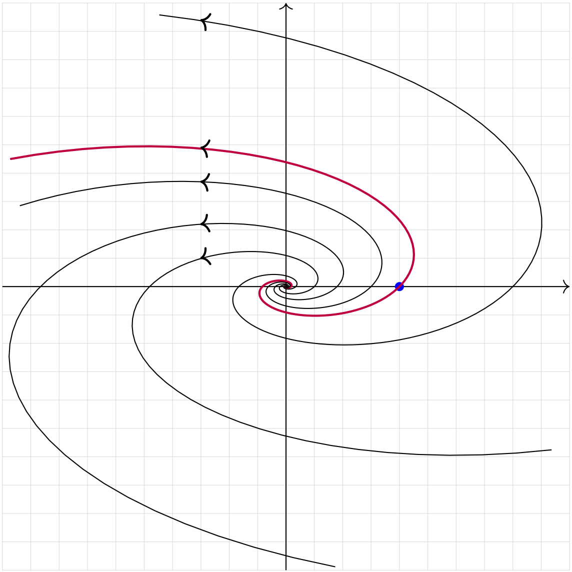
$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c_1 = 0,\ c_2 = 1$$

Løsningen vi leter etter er

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} e^t$$

Oppgaver System av differensialligninger

Fasediagram (løsningen av initialverdiproblemet er markert lilla):



Oppgaver System av differensialligninger

E) Vi ser på det inhomogene systemet

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

E1) Finn en basis for løsningsrommet til den tilhørende homogene ligningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

E2) Sjekk om $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$ eller $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning for systemet.

E3) Finn en generell løsning for systemet.

Oppgaver System av differensialligninger

Losning E):

E1) Egenverdi $\lambda_1 = 2$ gir egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og egenverdi $\lambda_2 = -1$ gir egenvektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Generelle løsninger er $y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$.

E2) Vi deriverer og ser at $y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} e^{-2t} \end{bmatrix}$ ikke er en løsning av systemet, og at $y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ er en løsning av systemet.

E3) Den generelle løsningen for systemet blir da
$y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$.