

TMA4115 Matematikk 3

Uke 12, V2025

**Interpolasjon, regresjon  
og markovkjeder**

Institutt for matematiske fag  
NTNU, Trondheim

March 18, 2025

## Sammendrag Uke 11 (Egenverdier, egenvektorer og diagonalisering)

▷ **Definisjon:** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. En skalar  $\lambda$  er en *egenverdi* for  $T$  hvis det finnes en vektor  $v \neq 0$  i  $V$  slik at

$$T(v) = \lambda \cdot v.$$

Vektoren  $v$  kalles en *egenvektor* for  $T$  som hører til egenverdien  $\lambda$ . Når  $T$  er gitt ved en  $n \times n$ -matrise  $A$ , så sier vi også at  $\lambda$  er en egenverdi for  $A$  og  $v$  er egenvektor for  $A$  som hører til egenverdien  $\lambda$ .

▷ **Teorem:** En  $n \times n$ -matrise  $A$  har  $0$  som egenverdi hvis og bare hvis den ikke er inverterbar.

▷ **Teorem:** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. La  $v_1, v_2, \dots, v_m$  være egenvektorer til  $T$  som hører til *forskjellige* egenverdier  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Da er vektorene  $v_i, i = 1, \dots, m$ , lineært uavhengige.

▷ **Teorem:** La  $V$  være et  $n$ -dimensjonalt vektorrom og  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon. Hvis  $T$  har  $n$  *forskjellige* egenverdier, så finnes det en basis for  $V$  som består av egenvektorer av  $T$ .

# Sammendrag Uke 11

▷ **Teorem:** La  $A$  være en  $n \times n$ -matrise.

- (a) Egenverdiene til  $A$  er alle løsninger  $\lambda$  av ligningen  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Vi kaller dette  $n$ -tegradspolynom i  $\lambda$  *karakteristiske polynomet* til  $A$ .
- (b) Hvis  $\lambda$  er en egenverdi for  $A$ , så er de tilhørende egenvektorene gitt ved alle ikke-trivielle løsninger av ligningen  $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ .

▷ **Definisjon:** La  $T: V \rightarrow V$  være en lineærtransformasjon, og anta at  $\lambda$  er en egenverdi for  $T$ . Da er *egenrommet* til  $\lambda$  mengden av alle egenvektorer som hører til  $\lambda$ , samt nullvektoren; altså mengden

$$\{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}.$$

Dimensjonen til egenrommet kalles den *geometriske multiplisiteten* til  $\lambda$ . Hvis  $T$  er gitt ved å multiplisere med en  $n \times n$ -matrise  $A$ , så er egenrommet til en egenverdi  $\lambda$  det samme som nullrommet til matrisen  $A - \lambda I$ .

# Sammendrag Uke 11

Vi oppsummerer prosessen for å finne egenverdier og egenvektorer til en  $n \times n$ -matrise  $A$ :

1. Vi finner egenverdiene til  $A$  ved å løse ligningen

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0.$$

Dette er en  $n$ -tegradsligning og har dermed maksimalt  $n$  (ikke nødvendigvis unike) løsninger  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

2. Vi finner egenrommene til  $A$  ved å løse for hver egenverdi  $\lambda_i$  ligningen

$$(A - \lambda_i I_n)x = 0.$$

Løsningsmengden til denne ligningen er egenrommet til  $\lambda_i$ .

# Sammendrag Uke 11

Husk: algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der  $z_i$  er *komplekse* tall og løsninger av ligningen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Dersom en faktor  $(z - z_k)$  forekommer  $m$  ganger i faktoriseringen, sier vi at  $z_k$  har multiplisitet  $m$ .

▷ **Teorem:** En kompleks  $n \times n$ -matrise  $A$  har alltid  $n$  egenverdier (talt med algebraisk multiplisitet.)

# Sammendrag Uke 11

- ▷ **Definisjon:** En  $n \times n$ -matrise  $A$  er *diagonaliserbar* hvis det finnes en diagonalmatrise  $D$  og en inverterbar matrise  $P$  slik at  $A = PDP^{-1}$ .
- ▷ **Teorem:** En  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis  $A$  har  $n$  lineært uavhengige egenvektorer.
- ▷ **Teorem:** 1) Hvis en  $n \times n$ -matrise  $A$  har  $n$  forskjellige egenverdier, så er  $A$  diagonaliserbar.  
2) En  $n \times n$ -matrise  $A$  er diagonaliserbar hvis og bare hvis  $A$  har  $n$  egenverdier (ikke alle egenverdier må nødvendigvis være forskjellige fra hverandre her) og dimensjonen til egenrommet til hver egenverdi  $\lambda$  er lik den algebraiske multiplisiteten til  $\lambda$ .
- ▷ **Definisjon:** En reell matrise kalles *symmetrisk* dersom  $A = A^T$ .
- ▷ **Teorem:** La  $A$  være en *symmetrisk*  $n \times n$ -matrise. Da har  $A$   $n$  reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og  $A$  er diagonaliserbar (som en reell matrise).

## Sammendrag Uke 11

- ▷ **Teorem:** La  $A$  være en reell *symmetrisk*  $n \times n$ -matrise. Egenvektorene til  $A$  tilhørende to distinkte egenverdier er ortogonale.
- ▷ **Definisjon:** En  $n \times n$ -matrise er *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den har  $n$  ortogonale egenvektorer.
- ▷ **Teorem:** En reell  $n \times n$ -matrise er ortogonalt diagonaliserbar med reelle egenvektorer hvis og bare hvis den er symmetrisk.
- ▷ **Teorem:** La  $A$  være en reell symmetrisk  $n \times n$ -matrise. Da eksisterer det en diagonalmatrise  $D$  og en ortogonal matrise  $Q$  slik at  $A = QDQ^T$ .
- ▷ **Definisjon:** En  $n \times n$ -matrise  $A$  kalles *hermitsk* hvis  $A = A^*$ .
- ▷ **Teorem:** En hermitsk  $n \times n$ -matrise har  $n$  reelle egenverdier (talt med multiplisitet) og er ortogonalt diagonaliserbar.

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

La  $A$  være en  $m \times n$ -matrise.  $Ax = b$  har løsning bare når  $b$  ligger i kolonnenrommet til  $A$ . Hvis ikke, så ønsker vi å finne en omtrentlig løsning (som er nærmest mulig en faktisk løsning).

Så hvis  $b \notin \text{Col}(A)$ , så vil vi finne en vektor  $\hat{x}$  slik at  $\|A\hat{x} - b\|$  er så liten som mulig. Dette oppnår vi når  $A\hat{x} = \text{Proj}_{\text{Col}(A)}(b)$

$$(A\hat{x} - b) \in (\text{Col}(A))^\perp = \text{Null}(A^T).$$

▷ **Teorem:** La  $A$  være en  $m \times n$ -matrise ( $m > n$ ) og  $b$  en kolonnevektor i  $\mathbb{R}^m$ . Mengden av minste kvadraters løsninger for systemet  $Ax = b$  er lik løsningsmengden for systemet  $A^T(Ax - b) = 0$ .

Hvis  $n \times n$ -matrisen  $A^T A$  er inverterbar, finnes det for hver  $b$ , en *unik* minste kvadraters løsning  $\hat{x}$  for systemet  $Ax = b$

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

Hvis  $A$  er en *kompleks*  $m \times n$ -matrise og  $b$  er en kolonnevektor i  $\mathbb{C}^m$ , kan vi spørre om minste kvadraters løsninger  $\hat{x}$  til systemet  $Ax = b$  i  $\mathbb{C}^n$ . Denne mengden er da lik løsningsmengden for systemet  $A^*(Ax - b) = 0$ .

$A^T A$  er en symmetrisk matrise fordi  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ . I det komplekse tilfellet har vi tilsvarende at  $A^* A$  er en hermitsk matrise.

Grunnen til at det kalles minste kvadraters metode er at avstanden  $\|v - w\|$  mellom to punkter  $v$  og  $w$  i  $\mathbb{R}^n$  måles ved å ta kvadratroten til summen av kvadratene:  $\|v - w\|^2 = (v_1 - w_1)^2 + \dots + (v_n - w_n)^2$ . Å minimere avstanden fra  $b$  til vektorene  $Ax$  betyr derfor at vi minimerer en sum av kvadrater.

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

## Interpolasjon.

Dersom vi har  $m + 1$  punkter  $(x_i, y_i)$  i  $\mathbb{R}^2$ , der  $x_i$ -ene er forskjellige for alle punkter, vil det generelt være mulig å finne et (unikt!) reelt polynom

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

hvor grafen går gjennom alle disse punktene, altså at  $p(x_i) = y_i$  for alle  $1 \leq i \leq m + 1$ .

Setter vi inn for  $(x_i, y_i)$  i formelen for  $p(x)$ , får vi et  $(m + 1) \times (m + 1)$ -ligningssystem, koeffisientene  $a_i$  er de ukjente, med totalmatrise

$$\begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \dots & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m+1}^m & x_{m+1}^{m-1} & \dots & x_{m+1} & 1 & y_{m+1} \end{bmatrix}$$

Det kan vises at dette ligningssystemet alltid har en unik løsning så lenge  $x_j \neq x_k$  for  $j \neq k$ .

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

## *Regresjon:*

Obs: dersom vi for eksempel har tre eller flere punkter kan vi ikke nødvendigvis finne en rett linje som går gjennom alle punktene (med mindre punktene tilfeldigvis ligger på en rett linje).

Da kan vi bruke minste kvadraters metode til å finne en linje som passer best mulig (eller mer generelt et  $m$ -tegradspolynom som passer best mulig hvis vi har mer enn  $m + 1$  punkter).

Dersom  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  er datapunkter i  $\mathbb{R}^2$ , kan vi prøve å finne linjen  $y = ax + b$  som passer best til disse punktene. Om punktene ligger på en linje, kan vi enkelt finne  $a$  og  $b$  slik at

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \dots \text{ og } y_m = ax_m + b.$$

Disse ligningene kan vi samle i en matriseligning

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

$$A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = y \text{ med } A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \text{ og } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} .$$

Dette betyr at hvis vi kan løse ligningssystemet så får vi linjen punktene ligger på.

Hvis punktene ikke ligger på en linje, kan vi bruke minste kvadraters metode på systemet for å finne  $a$  og  $b$  som gir oss linjen som approksimerer punktene best.

Man kan vise at minste kvadraters løsning gir oss linja som approkimerer punktene best, i den forstand at summen av kvadratene av de vertikale avstandene mellom punktene og linja er minst mulig.

# Sammendrag Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

## Markovkjeder

En vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  kalles en *sannsynlighetsvektor* dersom alle koordinatene er større enn eller lik 0 og summen av koordinatene er lik 1. For eksempel

så er  $v = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$  en sannsynlighetsvektor.

En  $n \times n$ -matrise  $M$  hvor alle kolonnene er sannsynlighetsvektorer kalles en *stokastisk matrise*.

Hvis  $M$  er en stokastisk matrise og  $x_0$  en sannsynlighetsvektor, så er følgen  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  hvor

$$x_1 = Mx_0 \quad x_2 = Mx_1 = M^2x_0 \quad \dots \quad x_n = Mx_{n-1} = M^n x_0 \quad \dots$$

en *Markovkjede* som er en sannsynlighetsmodell hvor man beveger seg fra et stadium til det neste i en tilfeldig prosess uten hukommelse om hva som har skjedd tidligere. Det vil si at neste trinn bare avhenger av nåværende og ikke av forrige sekvens.

## Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder (Uke 12)

▷ **Teorem:** En stokastisk matrise  $M$  har alltid  $\lambda = 1$  som en egenverdi.

En egenvektor for  $M$  som hører til egenverdien  $1$ , og som i tillegg er en sannsynlighetsvektor, kalles en *likevektsvektor*. En likevektsvektor  $q$  har egenskapen at

$$Mq = q.$$

En stokastisk matrise  $M$  er *regulær* dersom det finnes et heltall  $k \geq 1$  slik at alle elementene i  $M^k$  er større enn null.

▷ **Teorem:** La  $M$  være en regulær stokastisk matrise. Da har  $M$  en unik likevektsvektor  $q$ . For enhver utgangssannsynlighetsvektor  $x_0$  konvergerer Markovkjeden  $\{x_n\}$  til  $q$  når  $n \rightarrow \infty$ .

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

Følgende stokastiske matrise er regulære

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Husk at en stokastisk matrise  $M$  er regulær dersom det finnes en  $k \geq 1$  slik at alle elementene i  $M^k$  er større enn null. Vi kan regne ut at

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.18 & 0.06 \\ 0.54 & 0.58 & 0.34 \\ 0.24 & 0.24 & 0.6 \end{bmatrix},$$

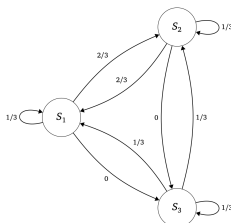
så  $A$  er regulær siden  $A^2$  kun har elementer som er ekte større enn null.

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

Følgende stokastiske matrise er ikke regulære

$$B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Vi kan illustrere dette ved hjelp av en graf, hvor vi lar  $S_1$ ,  $S_2$  og  $S_3$  være tilstandene tilhørende hver kolonne i  $B$ :



Vi ser at vi ikke kan komme oss fra tilstand  $S_1$  eller  $S_2$  til  $S_3$  med ikke-null sannsynlighet, og matrisen er derfor ikke regulær.

## Merk!

Hvis vi *ikke* kan bevege oss fra enhver tilstand til enhver annen tilstand, selv via flere steg, vil matrisen *ikke* være regulær.

Men hvis vi kan bevege oss fra enhver tilstand til enhver annen tilstand så *kan* matrisen være regulær men den trenger ikke å være det.

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

Bruk minste kvadraters metode på

A1)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

A2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning A1:** La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen og høyresiden i likningssystemet vårt. Vi ganger hver av disse med den adjungerte av  $A$  på venstre side, og får:

$$A^*A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A^*b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Vi må løse likningssystemet

$$A^*Ax = A^*b.$$

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

Dette systemet har følgende totalmatrise:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 17 & 1 & 19 \\ 1 & 5 & 11 \end{array} \right]$$

Når vi gausseliminerer denne, får vi:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Minste kvadraters metode gir altså løsningen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Løsning A2:** Vi må løse likningssystemet  $A^*Ax = A^*b$ :

$$A^*A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A^*b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Minste kvadraters metode gir løsningene

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merk at i denne oppgaven så er løsningsmengden en linje. Det er altså mulig at det er mange løsninger som gir en like god tilnærming for et ligningssystem. Generelt har  $A^*Ax = A^*b$  uendelig mange løsninger hvis og bare hvis kolonnene til  $A$  er lineært avhengige.

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Løsning A3:** Vi må løse likningssystemet  $A^*Ax = A^*b$ .

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^*b = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix}$$

Minste kvadraters metode gir løsningen

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette kan egentlig sees ved at første kolonne i matrisen  $A$  er identisk med vektoren  $b$ .

## Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

B) Betrakt  $2 \times 4$ -matrise  $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$

Hvilken av de følgende matrisene kan være lik  $A^T A$ ?

$$B1) \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B2) \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad B3) \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad B4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Losning B):** Alternativ  $B1)$  er eneste mulighet.

Vi kan først huske at  $A^T A$  vil være en symmetrisk matrise

$$(A^T A)^T = A^T A,$$

som utelukker  $B2)$  og  $B3)$ .

Siden  $A^T$  er en  $2 \times 4$ -matrise, vil  $(A^T)^T = A$  være en  $4 \times 2$ -matrise, og  $A^T A$  vil dermed være en  $2 \times 2$ -matrise, som utelukker alternativ  $B4)$ .

## Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

C) La  $x_1, \dots, x_n$  være faste tall. Matrisen nedenfor kalles en Vandermonde-matrise.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Gitt  $y = (y_1, \dots, y_n)$  i  $\mathbb{R}^n$ , anta at  $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$  i  $\mathbb{R}^n$  tilfredsstiller  $Vc = y$ , og definer polynomet  $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$ .

- C1) Vis at  $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$ . Vi kaller  $p(t)$  et interpolerende polynom for punktene  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  fordi grafen til  $p(t)$  går gjennom punktene.
- C2) Anta at  $x_1, \dots, x_n$  er distinkte tall. Vis at kolonnene i matrisen  $V$  er lineært uavhengige.
- C3) Bevis: Hvis  $x_1, \dots, x_n$  er distinkte tall, og  $y_1, \dots, y_n$  er vilkårlige tall, så finnes det et interpolerende polynom av grad  $\leq n - 1$  for  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning C1):** For  $i = 1, \dots, n$ ,

$$p(x_i) = c_0 + c_1 x_i + \dots + c_{n-1} x_i^{n-1} = \text{rad}_i(V) \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \text{rad}_i(V)c.$$

Ved en egenskap for matrise-multiplikasjon, og  $c$  ble valgt slik at  $Vc = y$ , får vi:

$$\text{rad}_i(V)c = \text{rad}_i(Vc) = \text{rad}_i(y) = y_i.$$

Dermed er  $p(x_i) = y_i$ . For å oppsummere, elementene i  $Vc$  er verdiene til polynomet  $p(x)$  ved  $x_1, \dots, x_n$ .

**Losning C2):** Anta at  $x_1, \dots, x_n$  er distinkte, og anta at  $Vc = 0$  for en vektor  $c$ . Da er elementene i  $c$  koeffisientene til et polynom som er null ved de distinkte punktene  $x_1, \dots, x_n$ . Et ikke-null polynom av grad  $n - 1$  kan ikke ha  $n$  nullpunkter, så polynomet må være identisk null (??). Det vil si at alle elementene i  $c$  må være null. Dette viser at kolonnene i  $V$  er lineært uavhengige.

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning C3):** Når  $x_1, \dots, x_n$  er distinkte, er kolonnene i  $V$  lineært uavhengige, ifølge C2). Derfor  $V$  er inverterbare matriser og kolonnene spanner over  $\mathbb{R}^n$ . Så for hver

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

finnes det en vektor  $c$  slik at  $Vc = y$ . La  $p$  være polynomet hvis koeffisienter er oppført i  $c$ . Da er, ifølge C1),  $p$  et interpolerende polynom for  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ .

## Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

D) Finn linjen  $y = ax + b$  som passer best til datapunktene

$$(2,1)^T, \quad (5,2)^T, \quad (7,3)^T, \quad (8,3)^T.$$

**Losning D):** Vi skal altså finne  $a$  og  $b$  som best mulig løser systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi multipliserer med  $A^T$  til venstre på begge sider av ligningen. Da får vi at  $A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T b$  er:

$$\begin{bmatrix} 142 & 22 \\ 22 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{ som har løsningen } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 2/7 \end{bmatrix}.$$

Linjen som passer best til punktene er altså:

$$y = \frac{5}{14}x + \frac{2}{7}.$$

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

E) Finn likevektsvektorene for de stokastiske matrisene

$$E1 A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \quad E2 B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 \end{bmatrix} \quad E3 C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

I denne oppgaven finner vi egenverdiene og egenvektorene på vanlig måte. Vi vet at slike matriser alltid har en egenverdi lik **1**. Da er den tilhørende egenvektoren, etter at den er normalisert slik at koordinatene summerer til **1**, en likevektsvektor for systemet.

**Losning E1:** Her finner vi at  $v = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor tilhørende egenverdien **1**. Denne vektoren summerer til  $7/4$ , som vi dermed må dele på for å få summen til å bli **1**. Da er  $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$  en likevektsvektor for systemet. Vi kan enkelt multiplisere ut og se at  $A\bar{v} = \bar{v}$ .

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Løsning E2:** Her finner vi at  $v = \begin{bmatrix} 5/9 \\ 1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til  $14/9$ , som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er  $\bar{v} = \begin{bmatrix} 5/14 \\ 9/14 \end{bmatrix}$  en likevektsvektor for systemet. Vi kan multiplisere ut og se at  $B\bar{v} = \bar{v}$ .

**Løsning E3:** Her finner vi at  $v = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$  er en egenvektor tilhørende egenverdien 1. Denne vektoren summerer til  $27/10$ , som vi dermed må dele på for å få summen til å bli 1. Da er  $\bar{v} = \begin{bmatrix} 30/54 \\ 10/135 \\ 10/27 \end{bmatrix}$  en likevektsvektor for systemet. Vi kan multiplisere ut og se at  $C\bar{v} = \bar{v}$ .

# Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

F) Været i Bergen er enten godt, likegyldig eller dårlig på en gitt dag.

– Hvis været er godt i dag, er det 60 % sjanse for at været vil være godt i morgen, 30 % sjanse for at været vil være likegyldig, og 10 % sjanse for at været vil være dårlig.

– Hvis været er likegyldig i dag, vil det være godt i morgen med sannsynlighet 40 % og likegyldig med sannsynlighet 30 %.

– Hvis været er dårlig i dag, vil det være godt i morgen med sannsynlighet 40 % og likegyldig med sannsynlighet 50 %.

F1) Hva er den stokastiske matrisen for denne situasjonen?

F2) Anta at det er 50 % sjanse for godt vær i dag og 50 % sjanse for likegyldig vær. Hva er sjansen for dårlig vær i morgen?

F3) Anta at det spådde været for mandag er 40 % likegyldig vær og 60 % dårlig vær. Hva er sjansen for godt vær på onsdag?

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning F1:** La  $G$  stå for godt vær,  $I$  for likegyldig vær, og  $B$  for dårlig vær. Endringen i været er gitt ved tabellen:

Fra:	G	I	B
Til:			
G	0.6	0.4	0.4
I	0.3	0.3	0.5
B	0.1	0.3	0.1

Dermed er den stokastiske matrisen  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning F2:** Den initiale tilstandsvektoren er:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beregning av  $x_1 = Px_0$ :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Dermed er sannsynligheten for dårlig vær i morgen **20%**.

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning F3:** Den initiale tilstandsvektoren er:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Beregning av  $x_1 = Px_0$ :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.42 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

Beregning av  $x_2 = Px_1$ :

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.42 \\ 0.18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.336 \\ 0.184 \end{bmatrix}$$

Dermed er sannsynligheten for godt vær på onsdag **48%**.

## Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

- G) La  $S$  være  $1 \times n$ -matrisen  $S = [1 \mid 1 \mid \cdots \mid 1]$
- G1) Forklar hvorfor en vektor  $x$  i  $\mathbb{R}^n$  er en sannsynlighetsvektor hvis og bare hvis alle koordinatene er ikke-negative og  $Sx = 1$ .
- G2) La  $P$  være en stokastisk  $n \times n$ -matrise. Vis at  $SP = S$ .
- G3) La  $P$  være en stokastisk  $n \times n$ -matrise og  $x$  en sannsynlighetsvektor. Vis at  $Px$  også er en sannsynlighetsvektor.
- G4) Vis at hvis  $P$  er en  $n \times n$  stokastisk matrise, så er også  $P^2$ .

**Losning G1:** En sannsynlighetsvektor er en vektor  $x$  i  $\mathbb{R}^n$  der alle koordinatene er større eller lik 0 og summen av koordinatene er lik 1. Produktet  $Sx$  er det samme som summen av alle koordinatene i  $x$ . Dersom alle koordinatene er ikke-negative og  $Sx = 1$ , så er  $x$  per definisjon en sannsynlighetsvektor. Motsatt vei: dersom  $x$  er en sannsynlighetsvektor så vil nødvendigvis alle koordinatene være ikke-negative, og produktet med  $S$  vil gi oss tallet 1.

## Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning G2:** En  $n \times n$  matrise  $P$  kalles stokastisk matrise hvis kolonnene i  $P$  er sannsynlighetsvektorer, det vil si at elementene er ikke-negative og kolonnesummene er lik  $1$ . Produktet  $SP$  er vektoren hvor hver koordinat i produktet er vektorproduktet mellom  $S$  og hver kolonne i  $P$ . Vi vet at hver kolonne i  $P$  er en sannsynlighetsvektor, så det følger fra forrige deloppgave at hver av de summerer til  $1$ . Da følger det at hver koordinat i  $SP$  er  $1$ , og altså at  $SP = S$ .

**Losning G3:** Siden alle elementene i både  $P$  og  $x$  er minst  $0$  er også alle elementene i  $Px$  minst  $0$ . Fra del a) er det nå nok å vise at  $SPx = 1$ . Fra del b) er  $SP = S$ . Derfor er  $SPx = (SP)x = Sx = 1$  hvor siste likhet holder fordi  $x$  er en sannsynlighetsvektor. Dette var nettopp den likheten vi behøvde, så  $Px$  er en sannsynlighetsvektor.

# Oppgaver Interpolasjon, regresjon og markovkjeder

**Losning G4:** La  $P = [p_1 \mid \cdots \mid p_n]$ . Da er

$$P^2 = PP = [Pp_1 \mid \cdots \mid Pp_n].$$

Fra G3) er kolonnene i  $P^2$  sannsynlighetsvektorer, så  $P^2$  er en stokastisk matrise.

Alternativt, siden  $P$  er en stokastisk matrise, har vi fra G2) at  $SP = S$ . Høyremultiplikasjon med  $P$  gir  $SPP = SP$ , og siden  $SP = S$ , følger det at  $SP^2 = S$ . Siden elementene i  $P$  er ikke-negative, er også elementene i  $P^2$  ikke-negative, og dermed er  $P^2$  en stokastisk matrise.