

TMA4115 Matematikk 3: Egenverdier, egenvektorer og diagonalisering

2025 Uke 11

Diagonalisering av Matriser

Diagonalisering er en teknikk for å forenkle beregninger med matriser ved å omforme dem til diagonalmatriser.

- En matrise A er **diagonaliserbar** hvis det finnes en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise P slik at:

$$A = PDP^{-1}$$

- Diagonalisering forenkler beregning av matrisepotenser:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

- En matrise er diagonaliserbar hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 1

Oppgave

Betrakt matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Finn egenverdiene og egenvektorene til A .
- Bestem om A er diagonaliserbar. Hvis den er, finn en matrise P og den tilsvarende diagonale matrisen D slik at $A = PDP^{-1}$.
- Diskuter implikasjonene av å ha gjentatte egenverdier på diagonaliserbarheten til A .

Eksempel 1 Løsning

(a) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 1 & 6 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (5 - \lambda)^2(2 - \lambda)$$

Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5 \text{ (med multiplisitet 2)}$$

For $\lambda_1 = 2$ finner vi egenvektorer ved å løse:

$$(A - 2I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorene er $\mathbf{v}_1 = s \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$.

Eksempel 1 Løsning

For $\lambda_2 = 5$ finner vi egenvektorer ved å løse:

$$(A - 5I)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egenvektorene er $\mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

- (b) For å være diagonaliserbar, må A ha nok lineært uavhengige egenvektorer. Vi kan kun finne to lineært uavhengige egenvektorer, f.eks:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Så A er ikke diagonaliserbar.

Eksempel 1 Løsning

- (c) En matrise uten gjentatte egenverdier er diagonaliserbar da forskjellige egenverdier alltid har lineært uavhenge egenvektorer. For en matrise som A med gjentatte egenverdier (her $\lambda_2 = 5$ med multiplisitet 2), trenger vi å sjekke hvis den har tre lineært uavhengige egenvektorer for å finne ut hvis A er diagonaliserbar. Generellt går dette ikke å avgjøre uten å finne egenvektorene for de gjentatte egenverdiene. F. eks. matrisen

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Har samme egenverdier som A , men er diagonaliserbar fordi både

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer til A med egenverdi $\lambda_2 = 5$.

Funksjoner av Matriser

Funksjoner av matriser, som eksponentialen eller sinus, kan defineres gjennom Taylor-rekker:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k$$

- **Eksponentialfunksjonen** av en matrise A er gitt ved:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

- Hvis A er diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, kan $f(A)$ beregnes som:

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}$$

der $f(D)$ er en diagonalmatrise med $f(\lambda_i)$ på diagonalen, hvor λ_i er egenverdiene til A .

Eksempel 2

Oppgave

Betrakt matrisen:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Finn egenverdiene og egenvektorene til B .
- (b) Finn en diagonale matrise D og tilsvarende matrise P slik at $B = PDP^{-1}$.
- (c) Bruk diagonaliseringsformen til å beregne e^B (den matrisielle eksponentialen av B).

Eksempel 2 Løsning

(a) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

For $\lambda_1 = 1$:

$$(B - I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Eksempel 2 Løsning

For $\lambda_2 = 2$:

$$(B - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_3 = 3$:

$$(B - 3I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En egenvektor er $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Eksempel 2 Løsning

(b) Vi har funnet tre lineært uavhengige egenvektorer:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed er B diagonaliserbar. Med disse kan vi velge matrisen P og den diagonale matrisen D som:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Så $B = PDP^{-1}$.

Eksempel 2 Løsning

- (c) Den matrisielle eksponentialen e^B kan beregnes ved å bruke diagonaliseringsformen:

$$e^B = Pe^D P^{-1}$$

Først beregner vi P^{-1} og finner:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deretter beregner vi e^B :

$$e^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 2e^2 - 2e & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}$$

Symmetriske, Ortogonale, og Hermitiske Matriser

- En **symmetrisk matrise** er en reell matrise A slik at $A = A^T$.
- En **hermitsk matrise** er en kompleks matrise A slik at $A = A^*$, der $A^* = \bar{A}^T$ er den komplekskonjugerte og transponerte av A .
- En **ortogonal matrise** Q er en matrise hvor kolonnevektorene utgjør en ortonormal mengde. Ortogonale matriser er inverterbare og deres invers er lik deres transponert: $Q^T = Q^{-1}$.

Spektralteoremet

For en reell symmetrisk $n \times n$ -matrise A :

- A har n reelle egenverdier (talt med multiplisitet).
- A er diagonaliserbar.
- Egenvektorene til A som tilhører forskjellige egenverdier er ortogonale.

Teorem (Spektralteoremet): En reell symmetrisk $n \times n$ -matrise A er ortogonalt diagonaliserbar, dvs. det finnes en diagonalmatrise D og en ortogonal matrise Q slik at:

$$A = QDQ^T$$

Eksempel 3

Oppgave

Finn ut hvis følgende matriser er diagonaliserbare:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (b) B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(c) C = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad (d) D = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 2 & d \\ 0 & d & 2 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 3 Løsning

(a) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda)$$

Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4.$$

Dersom alle er forskjellige er A diagonaliserbar.

Eksempel 3 Løsning

(b) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 5 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3$$

Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

B er ikke diagonaliserbar siden det ville si at

$$B = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 3 Løsning

(c) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & a - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & b - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)^2(b - \lambda)$$

Egenverdiene er:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a, \quad \lambda_3 = b$$

For $\lambda = a$:

$$(C - aI)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 3 Løsning

Hvis $a \neq b$ gir dette gir kun én lineært uavhengig egenvektor

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Den algebraiske multiplisiteten er 2 for $\lambda_1 = a$ og derfor

høyre enn den geometriske multiplisiteten som er 1, så vi kan ikke finne n lineært uavhengige egenvektorer og C er ikke diagonaliserbar.

For $a = b$ finner vi en til lineært uavhengig egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

for $\lambda_1 = a$ så den geometriske multiplisiteten er nå 2, men den algebraiske multiplisiteten har økt til 3, så C er fortsatt ikke diagonaliserbar.

Konklusjonen er at C er ikke diagonaliserbar uansett verdiene på a og b .

Eksempel 3 Løsning

- (d) For å vise at D er diagonaliserbar det nok å se at D er symmetrisk ($D^T = D$) å bruke spektralteoremet.