

TMA4115 Matematikk 3: Egenverdier, egenvektorer og diagonalisering

2025 Uke 10

Definisjon av Egenverdier og Egenvektorer

For en kvadratisk matrise A , er en egenvektor \mathbf{v} en vektor slik at:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

hvor λ er en skalar kjent som egenverdien som korresponderer med \mathbf{v} .

- Hvis \mathbf{v} er en egenvektor, er enhver skalarmultiplum $c\mathbf{v}$ også en egenvektor.
- Untatt er $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ siden $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ for alle A og λ

Eksempel 1

Oppgave

Betrakt matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Beskriv transformasjonen som matrisen A utfører på vektorer i planet.
- (b) Bestem egenverdiene til matrisen A .
- (c) Finn egenvektorene som tilhører egenverdiene.
- (d) Finn egenverdiene og egenvektorene til A^T .

Eksempel 1 løsning

(a) Transformasjonen er gitt ved:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix}$$

(b) Egenverdiene, λ må oppfylle

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix}$$

Den andre ligningen gir at enten er $\lambda = 1$ eller så er $y = 0$, men er $y = 0$ så gir den første ligningen at $\lambda = 1$, så $\lambda = 1$ er den eneste egenverdien.

Eksempel 1 løsning

(c) Med $\lambda = 1$ får vi $y = 0$ men vilkørlig x så egenvektorene er gitt ved

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \neq 0.$$

(d) På samme måte finner vi egenverdi $\lambda = 1$ men med egenvektorer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad y \neq 0.$$

Å Finne Egenverdier og Egenvektorer

For å finne egenverdiene til en matrise A :

- Løs det karakteristiske polynomet:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dette resulterer i en ligning for λ med løsninger som er egenverdiene.

- For hver egenverdi λ_i , finn de tilhørende egenvektorene ved å løse:

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Eksempel 2

Oppgave

Betrakt matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Finn egenverdiene til matrisen A .
- (b) Bestem egenvektorene som tilhører hver egenverdi funnet i del (a).
- (c) Tegn egenvektorene i et koordinatsystemet før og etter multiplikasjon med A .
- (d) Verifiser at egenvektorene oppfyller ligningen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ for hver egenverdi λ .

Eksempel 2 løsning

(a) Vi finner røttene til det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 \cdot 1 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4)\end{aligned}$$

Så egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$

Eksempel 2 løsning

(b) For $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så egenvektorene er $\mathbf{v}_1 = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $s \neq 0$.

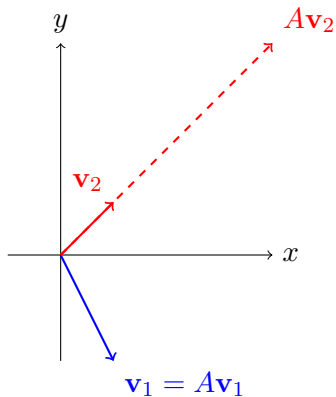
For $\lambda_2 = 4$:

$$(A - 4I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Så egenvektorene er $\mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Eksempel 2 løsning

(c) Med $t = 1$, $s = 1$ får vi figuren:



Eksempel 2 løsning

(d) For \mathbf{v}_1 :

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_1$$

For \mathbf{v}_2 :

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \cdot \mathbf{v}_2$$

Eksempel 3

Oppgave

La R være matrisen:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Som beskriver rotasjon mot klokken med vinkelen θ .

- (a) For hvilke verdier på θ er egenverdiene reelle?
- (b) Finn egenverdier og egenvektorene for disse verdiene på θ .
- (c) Finn egenverdier og egenvektorer når $\theta = \pi/2$.
- (d) Finn egenverdiene og egenvektorene for vilkørlig θ .

Eksempel 3 løsning

- (a) Vi begrenser oss til $0 \leq \theta < 2\pi$ (alt er likt hvis du legger til $2\pi n$ for noe heltall n). Vi får reelle egenverdier kun når resultatet av rotasjonen gir en ny vektor langs linjen utspent av vektoren selv. Dette skjer kun når du ikke roterer i det hele tatt ($\theta = 0$) eller når du roterer halvveis rundt ($\theta = \pi$).
- (b) For $\theta = 0$:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eigenverdier: $\lambda = 1$ Egenvektorer: Alle vektorer i \mathbb{R}^2 foruten $\mathbf{0}$.

For $\theta = \pi$:

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Eigenverdier: $\lambda = -1$ Egenvektorer: Alle vektorer i \mathbb{R}^2 foruten $\mathbf{0}$.

Eksempel 3 løsning

(c) For å finne egenverdiene, løser vi det karakteristiske polynomet:

$$0 = \det(R - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$.

For å finne egenvektorene, løser vi $(R - \lambda I)\mathbf{v} = 0$:

For $\lambda_1 = i$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir egenvektorer:

$$\mathbf{v}_1 = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Eksempel 3 løsning

For $\lambda = -i$:

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir egenvektorer:

$$\mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Eksempel 3 løsning (d)

(d) Egenverdiene finnes ved å løse det karakteristiske polynomet:

$$\begin{aligned}\det(R - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{bmatrix} = (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \cos(\theta) + 1 = 0\end{aligned}$$

Løsningen til $\lambda^2 - 2\lambda \cos(\theta) + 1 = 0$ er gitt ved:

$$\lambda = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - 1} = \cos(\theta) \pm \sqrt{-\sin^2(\theta)} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$$

Så egenverdiene er $\lambda_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ og
 $\lambda_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = e^{-i\theta}$.

Eksempel 3 løsning (d)

For å finne egenvektorene, løser vi $(R - \lambda I)\mathbf{v} = 0$:

For $\lambda = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$:

$$\begin{bmatrix} -i \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -i \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \sin(\theta) \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Når $\sin(\theta) \neq 0$ gir dette egenvektorer:

$$\mathbf{v}_1 = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Eksempel 3 løsning (d)

For $\lambda = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$:

$$\begin{bmatrix} i \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & i \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \sin(\theta) \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Når $\sin(\theta) \neq 0$ gir dette egenvektorer:

$$\mathbf{v}_2 = t \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Egenskaper

- Mengden av alle egenvektorer som tilhører en egenverdi λ , sammen med nullvektoren, danner egenrommet til λ .
- Egenvektorer som tilhører forskjellige egenverdier er lineært uavhengige.
- Hvis en $n \times n$ matrise A har n lineært uavhengige egenvektorer, er A diagonaliserbar, noe som betyr at den kan skrives som en diagonalmatrise ved en passende basistransformasjon.