

Løsningsforslag ekstraoppgaver 5

7.1. For å avgjøre om en delmengde $U \subseteq V$ av et vektorrom V er et underrom, må vi sjekke følgende (Teorem 7.9):

1. Nullvektoren $\mathbf{0}$ ligger i U .
2. For alle vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} i U , ligger summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i U .
3. For alle vektorer \mathbf{u} i U og alle skalærer c ligger skalarproduktet $c\mathbf{u}$ i U .

a) M er ikke et underrom av \mathbb{R} . For eksempel er

$$(-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette er en vektor som ikke tilfredsstiller $a \geq 0$.

b) Ja, dette er et underrom. La oss sjekke de tre punktene over.

1. La $x = y = z = 0$. Da har vi $0 - 0 + 0 = 0$, så nullvektoren er med.
2. La $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ og $\mathbf{u} = (x_2, y_2, z_2)$ være løsninger av $x - y + z = 0$. Da er $x_1 - y_1 + z_1 = 0$ og $x_2 - y_2 + z_2 = 0$. Videre er $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Dette må også være en løsning siden $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$. Så mengden er lukket under addisjon.
3. La $\mathbf{v} = (x, y, z)$ være en løsning, slik at $x - y + z = 0$. Da er $c\mathbf{v} = (cx, cy, cz)$ også en løsning siden $cx - cy + cz = c \cdot (x - y + z) = c \cdot 0 = 0$. Så mengden er lukket under skalarmultiplikasjon.

Dermed er denne mengden et underrom av \mathbb{C}^3 .

c) Ikke et underrom. Det kan vi se for eksempel ved at hvis (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2) er løsninger, er $x_1 - y_1 + z_1 = 1$ og $x_2 - y_2 + z_2 = 1$, men $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$ er ikke en løsning. Så mengden er ikke lukket under addisjon.

d) Komplekst underrom betyr at vi henter skalærer fra \mathbb{C} . La oss undersøke skalarmultiplikasjon. La $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $c = i$. Da er $c\mathbf{v} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$, som ikke er en vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ der $a, b \in \mathbb{R}$. Dermed er ikke denne mengden et komplekst underrom av \mathbb{C}^2 .

e) Reelt vektorrom betyr at vi henter skalærer fra \mathbb{R} .

1. Nullvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er med siden $0 \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \in L$.

3. $c \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \end{bmatrix} \in L$ for $c \in \mathbb{R}$.

Mengden L er et reelt underrom av \mathbb{C}^2 .

7.2. Snittet er et underrom; unionen er ikke nødvendigvis et underrom.

Union: Det er mange moteksempler. Du kan f. eks ta to linjer i \mathbb{R}^2 som kun krysser hverandre i origo.

Snitt: U_1 og U_2 inneholder begge null-vektoren, og er begge lukket under vektorromsoperasjonene. Husk at x er i $U_1 \cap U_2$ hvis og bare hvis x er i både U_1 og U_2 . Null-vektoren ligger i U_1 og U_2 og derfor i $U_1 \cap U_2$; summen av to vektorer i $U_1 \cap U_2$ ligger i både U_1 og U_2 siden både U_1 og U_2 er underrom; et skalarmultiplum av en vektor i $U_1 \cap U_2$ ligger også i både U_1 og U_2 , igjen siden både U_1 og U_2 er underrom.

7.3.

a) La $M_{i,j}$ være $m \times n$ -matrisen som har 1 i posisjon (i, j) og 0 ellers. Samlingen $M_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ er en basis. Dimensjonen er antall element i en basis: mn .

b) U og W er underrom; V er ikke.

c) En basis for U består av matrisene $M_{i,i}$, for $i = 1, \dots, n$.

Dimensjonen til U er derfor n .

En basis for W består av matrisene $M_{i,j} + M_{j,i}$ for $i > j$ og $M_{i,i}$ for $i = j$.

Hint: Element (i, j) må være likt som element (j, i) for symmetriske matriser, derfor inneholder $M_{i,j} + M_{j,i}$ akkurat den informasjonen du trenger.

Dimensjonen til W : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (vi trenger bare å telle elementene langs og under diagonalen).

7.4.

a) Vektorrommene \mathcal{P}_n , for forskjellige n , er underrom av hverandre på denne måten:

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots$$

Vektorrommene $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, for forskjellige n , er også underrom av hverandre, for alle funksjoner som er n ganger deriverbare er også $n - 1$ ganger deriverbare:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \supset \dots$$

For hver n har vi:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Alle n -tegradspolynomer er polynomer; alle polynomer er uendelig mange ganger deriverbare; alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner er deriverbare n ganger; alle n ganger deriverbare funksjoner er kontinuerlige (deriverbar impliserer kontinuitet).

b) Du har vist at \mathcal{P}_n har en endelig basis tidligere, og det er derfor endeligdimensjonalt. Vi har sett at \mathcal{P} er uendeligdimensjonalt i notatet. Derfor er resten av vektorrommene uendeligdimensjonale; alle har et uendeligdimensjonalt underrom.

7.5.

a) Nei.

\mathbb{Z} er ikke lukket under skalarmultiplikasjon: Hvis du multipliserer et heltall med et reelt tall får du ikke nødvendigvis et heltall. Eksempel: $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ er ikke et heltall.

b) Nei.

La oss sjekke at $(ab) * n \neq a * (b * n)$ for passende valg av reelle tall a og b , og heltall n .

Eksempel: $[\frac{1}{2} \cdot 1] = 0$ slik at $2 * (\frac{1}{2} * 1) = 0$. Men

$$(2 \cdot \frac{1}{2}) * 1 = 1 * 1 = 1.$$

Merk: Vi viste altså at \mathbb{Z} med denne skalarmultiplikasjonen umulig kan være et vektorrom. Mer generelt kan man vise at det ikke finnes noen vektorromstruktur på \mathbb{Z} . Dette henger sammen med at noen typer uendelig er større enn andre.

7.6.

a) For å svare på spørsmålet må vi utforske om det finnes konstanter a , b og c slik at

$$a \cos(x) + b \sin(x) + c \tan(x) = 0$$

for alle x i D . Velg $x = 0$ for å se at $a = 0$ ettersom $\sin(0) = 0$ og $\tan(0) = 0$. Vi har $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ som gir likningen

$$b \sin(x) = -c \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

for alle x i D . Sinus er aldri null for $x \neq 0$ i D slik at vi kan stryke $\sin(x)$ – på denne delen av D – og få likningen

$$\cos(x) = \frac{-c}{b}.$$

Men cosinus er helt klart ikke konstant for alle $x \neq 0$ i D , så det kan ikke finnes noen ikke-trivielle løsninger. Vektorene er altså lineært uavhengige.

b) Ja.

La E være ett punkt i D (du kan velge dette punktet vilkårlig). En funksjon fra ett punkt til \mathbb{R} er essensielt det samme som et tall i \mathbb{R} , nemlig det tallet du sender punktet til. Vektorrommet $\mathcal{C}(E)$ blir slik essensielt vektorrommet \mathbb{R} . Tre vektorer (tall) i \mathbb{R} er selvfølgelig lineært avhengige (vektorrommet er endimensjonalt). For å gjøre det helt konkret kan vi velge $E = \{1\}$. Da er $\sin(1) \cdot \cos(1) + (-\cos(1)) \cdot \sin(1) + 0 \cdot \tan(1) = 0$.

7.7.

a) Vi bruker det vi skal vise i c), nemlig at $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ for alle skalarer c . Dersom $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $c \neq 0$ bruker vi c^{-1} , og aksiom V5 og V6 og beregner:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 1 \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{1}{c}\right) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} \cdot (c \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{c} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vi konkluderer med at dersom $c \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ er $c = 0$ eller $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller begge deler.

b) Fra likheten $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ får du, ved å bruke aksiom (V2) på begge sider:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

Vi vet fra aksiom (V4) at \mathbf{u} har en additiv invers $-\mathbf{u}$. Legg til denne på hver side av likheten over; da får du:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u}) = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$$

Bruk aksiom (V1) på begge sider:

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = \mathbf{w} + (\mathbf{u} + (-\mathbf{u}))$$

Bruk aksiom (V4):

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + \mathbf{0}$$

Bruk aksiom (V3):

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

c)

Vi bruker V3 og V7:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} &= c \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \\ &= c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nå bruker vi resultatet fra b) til å konkludere med at $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Vi bruker aksiom V6 og V8:

$$(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v} = (-1 + 1) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v}$$

Vi må vise $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Vi beregner med aksiom V8 og V3:

$$\mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$$

Bruk b) til å dedusere $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$. Vi har altså $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, og dermed får vi $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ ved å anvende b) på $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = -\mathbf{v} + \mathbf{v}$.

7.8.

a) En naturlig basis for \mathcal{P}_n er gitt av $1, x, \dots, x^n$. Dette er akkurat hva vi trenger for å få alle n -tegradspolynom. Basert på dette virker det rimelig at $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ er en basis for \mathcal{P} (da burde vi akkurat ha det vi trenger for å få alle polynomer av vilkårlig grad).

b) Spanner ut: Et vilkårlig polynom kan skrives på formen $a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$. Men dette polynomet er automatisk en lineærkombinasjon av x^0, x^1, \dots, x^n som er en delmengde av \mathcal{B} .

Lineært uavhengig: Vi må vise at likningen

$$a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0,$$

kun har den trivielle løsningen for koeffisientene a_i . Men gitt reelle tall a_0, \dots, a_n , er venstre siden av likningen et polynom av grad $\leq n$. Dersom polynomet er av ekte grad $k > 0$, dvs $a_k \neq 0$ og $a_m = 0$ for $m > k$, har venstre side ikke mer enn k nullpunkter for x , mens høyre opplagt har uendelig mange nullpunkter. Den eneste måten likheten kan holde for alle verdier av x er derfor om $a_i = 0$ for alle i . Det vil si, likningen har bare den trivielle løsningen og \mathcal{B} er Lineært uavhengig.

Vi har sett at \mathcal{B} er lineært uavhengig og spenner ut \mathcal{P} . Det er definisjonen av å være basis for \mathcal{P} .

Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2

Høst 2018: Oppgave 8

Vår 2019: Oppgave 1

Kont 2019: Oppgave 2ab