

# Løsningsforslag ekstraoppgaver 4

## 5.1.

a) Radreducer matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall  $c$  slik at:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Merk at å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** er å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**. En løsningsmetode er derfor å først løse systemet med totalmatrise  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 18 & 0 \end{bmatrix}$ , kall løsningen  $(x_0, y_0)$ , og så velge en vektor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

hvor  $a$  ikke er  $-3x_0 + 4y_0$ .

c) Teorem 5.15 i notatene gir at de tre vektorene spenner ut  $\mathbb{R}^3$ .

## 5.2.

a) **a)** er *nesten* riktig. Tre vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning, altså en løsning med minst en av  $a$ ,  $b$  og  $c$  ulik null. Dette er ekvivalent med at *en* av  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med en koeffisient som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at  $\mathbf{u}$  kan skrives som en lineærkombinasjon av  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$ , men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . De tre vektorene er lineært avhengige i  $\mathbb{R}^2$ , men det finnes ikke  $a$  og  $b$  slik at  $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$  fordi  $\mathbf{u}$  ligger på  $x$ -aksen og de to andre ligger på  $y$ -aksen. Merk også at  $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} + 0\mathbf{u}$  i dette tilfellet;  $\mathbf{w}$  kan altså skrives som en lineærkombinasjon av de to andre.

b) Påstanden er kjempfeil. Vi trenger bare ett moteksempel, ta  $\mathbf{w} = 2 \cdot \mathbf{u}$  hvor  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  er lineært uavhengige. Opplagt er ikke  $\mathbf{w}$  og  $\mathbf{u}$  er lineært uavhengige, selv om både  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ , og  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er det.

## 5.3.

a) Påstanden er usann. Et veldig enkelt moteksempel:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Påstanden er sann. Bevis:

Anta at vektorene  $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_t$  er lineært uavhengige. Vi skal vise at  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  også er lineært uavhengige.

Se på likningen

$$\mathbf{v}_1x_1 + \mathbf{v}_2x_2 + \dots + \mathbf{v}_tx_t = \mathbf{0}.$$

Anta at  $(a_1, a_2, \dots, a_t)$  er en løsning av denne likningen, altså at

$$\mathbf{v}_1a_1 + \mathbf{v}_2a_2 + \dots + \mathbf{v}_ta_t = \mathbf{0}.$$

Da får vi:

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}_1)a_1 + (A\mathbf{v}_2)a_2 + \dots + (A\mathbf{v}_t)a_t \\ = A(\mathbf{v}_1a_1 + \mathbf{v}_2a_2 + \dots + \mathbf{v}_ta_t) \\ = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Men siden vi har antatt at  $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_t$  er lineært uavhengige, betyr dette at vi må ha

$$a_1 = a_2 = \dots = a_t = 0.$$

Nå kan vi oppsummere det vi har gjort: Vi startet med å si at  $(a_1, a_2, \dots, a_t)$  er en løsning av likningen

$$\mathbf{v}_1x_1 + \mathbf{v}_2x_2 + \dots + \mathbf{v}_tx_t = \mathbf{0},$$

og konkluderte med at da må alle  $a$ -ene være 0. Det betyr at denne likningen kun har den trivielle løsningen, og dermed er vektorene  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t$  lineært uavhengige.

6.1. Vi utvikler langs rad 1 og får

$$1 \cdot (-4 - 2) - 1 \cdot (-2 - 6) + 0 = -6 + 8 = 2.$$

Siden  $2 \neq 0$  konkluderer vi med at kolonnene er lineært uavhengige.

6.2. Det er kanskje enklest å løse c) først. Om vi skal gå rett på a) må vi bruke at determinanten til  $A$  er lik arealet til parallelogrammet utspent av  $A\mathbf{e}_1$  og  $A\mathbf{e}_2$ , med fortegn gitt av om  $A\mathbf{e}_2$  er til venstre eller høyre for  $A\mathbf{e}_1$ .

Vi kan anta at vinklene  $\theta$  og  $\varphi$  ligger i intervallet  $[-\pi, \pi)$ .

a) Det er kun vinkelen  $\varphi$  som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis  $\varphi$  er 0 eller  $-\pi$ , og ellers har determinanten samme fortegn som  $\varphi$ .

b) Hvis vi øker  $\alpha_1$  eller  $\alpha_2$ , så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minsker determinanten.

Hvis vi varierer  $\varphi$  innenfor intervallet  $[-\pi/2, \pi/2]$ , så øker determinanten når  $\varphi$  øker. I intervallene  $[-\pi, -\pi/2]$  og  $[\pi/2, \pi)$  er det omvendt.

Å variere  $\theta$  har ingen effekt på determinanten.

c)  $\det A = \alpha_1 \alpha_2 \sin \varphi$

### 6.3.

a) Sant.

En matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke er lik null. Vi vet også at  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ . Oppgaven gir oss at  $\det(AB) \neq 0$ .

b) Sant.

Dette følger fra  $AA^{-1} = I$  og  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

6.4. Determinanten må være lik null.

Hint: Vi antar at  $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{0}$  for  $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Ved regnereglene for matriser blir dette  $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Likningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  har altså en ikke-triviell løsning;  $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ . Dette betyr at  $A$  ikke er inverterbar, og har derfor determinant 0.

## Eksamensoppgaver

Høst 2017: Oppgave 2abd

Vår 2018: Oppgave 3a

Høst 2018: Oppgave 2

Vår 2019: Oppgave 3