

# Løsningsforslag ekstraoppgaver 8

**9.1.** Vi bruker indreproduktet definert i Teorem 9.22. Vi beregner vinkelen som definert under Teorem 9.7.

a) Det følger at

$$\langle -x, e^x \rangle = - \int_0^1 x e^x dx = -1 \neq 0.$$

Indreproduktet er lik  $-1$ , og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\| -x \| = \sqrt{\langle -x, -x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

og

$$\| e^x \| = \sqrt{\langle e^x, e^x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}.$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle -x, e^x \rangle}{\| -x \| \| e^x \|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}}\right) \\ &= 165.7^\circ \end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle, men går i motsatt retning av hverandre. Husk at  $\Theta \approx 0^\circ$  betyr at de er ca parallelle,  $\Theta \approx 90^\circ$  betyr at de er ca ortogonale og  $\Theta \approx 180^\circ$  parallelle i motsatte retninger.

b) Det følger at

$$\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)(x - \sin x) dx = 0.012.$$

Indreproduktet er ulik 0, og funksjonene er dermed ikke ortogonale.

Vi får at lengdene er

$$\begin{aligned} \| x^3 - \frac{1}{3}x \| &= \sqrt{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x^3 - \frac{1}{3}x \rangle} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (x^3 - \frac{1}{3}x)^2 dx} \\ &\approx 0.216 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \| x - \sin x \| &= \sqrt{\langle x - \sin x, x - \sin x \rangle} \\ &= \int_0^1 (x - \sin x)^2 dx \\ &\approx 0.061. \end{aligned}$$

Det følger at vinkelen er

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\langle x^3 - \frac{1}{3}x, x - \sin x \rangle}{\| x^3 - \frac{1}{3}x \| \| x - \sin x \|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{0.012}{0.216 \cdot 0.061}\right) \\ &= \cos^{-1}(0.91) \\ &= 24.49^\circ. \end{aligned}$$

Vi konkluderer at funksjonene er nesten parallelle.

c) Vi har at  $\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x \rangle = \int_0^1 x(x^2 - \frac{3}{4}x) dx = 0$ .

Indreproduktet er lik 0, og funksjonene er dermed ortogonale. Det følger også at vinkelen  $\Theta = 90^\circ$ .

**9.2.** Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortogonal basis. La  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Vi setter

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\| \mathbf{u}_1 \|^2} \mathbf{u}_1$  og regner ut  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \frac{8}{5} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ . Vi projiserer vektoren  $(i, 2+i, 1)$  ned på

hver basisvektor og summerer, slik Teorem 9.13 sier vi kan. Da får vi følgende litt hårete utregning:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{U}} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} + P_{\mathbf{u}_2} \begin{bmatrix} i \\ 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4+3i \\ 8+6i \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{430} \begin{bmatrix} -234+162i \\ 117-81i \\ -65+45i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{86} \begin{bmatrix} 22+84i \\ 161+87i \\ -13+9i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**9.3.**

a) La  $\mathbf{v}_1 = 1$ . La så  $\mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1}{2}$ . Til slutt la  $\mathbf{v}_3 = x^2 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\langle x - \frac{1}{2}, x^2 \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ . Da utgjør  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  og  $\mathbf{v}_3$  en ortogonal basis for  $\text{Sp}\{1, x, x^2\}$ .

b) Dette er ikke samme svar som Eksempel 9.33 i notatet, men det gjør ingenting. Det finnes selvsagt mange ortogonale basiser for et gitt indreproduktrom.

#### 9.4.

a) Ved å regne ut på samme måte som tidligere i denne øvingen så får vi følgende lengder:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\|x^2\| = \sqrt{\langle x^2, x^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\|x^3\| = \sqrt{\langle x^3, x^3 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^6 dx} = \frac{1}{\sqrt{7}},$$

$$\|x^4\| = \sqrt{\langle x^4, x^4 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^8 dx} = \frac{1}{\sqrt{9}},$$

$$\|x^5\| = \sqrt{\langle x^5, x^5 \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{10} dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

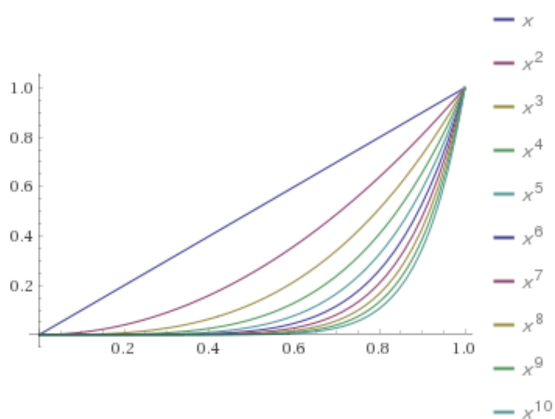
b) Generelt får vi:

$$\|x^n\| = \sqrt{\langle x^n, x^n \rangle} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Vi ser dermed at når  $n \rightarrow \infty$  så  $\|x^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$ .

c) Følgende figur illustrerer grafen til  $x^n$  når  $n$  vokser. Arealet under grafen minsker, og dermed minsker også lengden til  $x^n$ .

Plot:



## Eksamensoppgaver

Vår 2019: Oppgave 6  
 Kont 2019: Oppgave 2  
 Kont 2019: Oppgave 7  
 Høst 2019: Oppgave 5ab