

Innlevering 7

Frist: Onsdag 16. april kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

Opgaver til kapittel 14

1. Omformulér følgende andreordens differensialligninger til førsteordenssystem:

- $y''(t) - y(t) = 0$
- $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0$
- $2y''(t) - y'(t) = 3t \sin t$

2. Finn generell løsning til ligningene

- $y'' + 3y' + 2y = 0$
- $y'' - 2y' + y = \cos t$
- $y'' - y' - 2y = e^{2t}$
- $y'' + 3y = 5 + 3t^2$
- $y'' + y' - 2y = 6te^{-2t} + 10 \sin t$

Hvordan kan du sjekke at du har regnet riktig?

3. Løs initialverdiproblemene

- $y'' + 6y' + 5y = e^{-t} + 1$,
 $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = 0$
- $y'' + y' + y = t$,
 $y(0) = -2$, $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 + 2e^{-\pi/(2\sqrt{3})}$

4. Vis at $y(x) = c_1 \frac{\ln x}{x} + c_2 \frac{1}{x}$ er en løsning til differensialligningen

$$x^2 y''(x) + 3x y'(x) + y(x) = 0,$$

som er et eksempel på differensialligninger med variable koeffisienter kalt Cauchy-Euler-ligningene.

Noen tallsvar

- $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$
 - $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t - \frac{1}{2} \sin t$
 - $y(t) = \left(c_1 + \frac{1}{3}t\right)e^{2t} + c_2 e^{-t}$
 - $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) + 1 + t^2$
 - $y(t) = c_1 e^t + \left(c_2 - \frac{2}{3}t - t^2\right)e^{-2t} - 3 \sin t - \cos t$

5. Den frie bevegelsen i et masse-fjær-system kan for enkelthets skyld modelleres som

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

hvor ω_0 er den naturlige svingningsfrekvensen til systemet. Én dag blir systemet påvirket av en ytre, periodisk kraft med frekvens ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = A \cos(\omega t),$$

Her er A et mål på styrken til kraften og vi kan anta at masse-fjær-systemet var i ro innledningsvis, dvs.

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

- Finn løsningen $y(t)$ uttrykt ved A , ω_0 og ω .
- La $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ og $\delta = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)$ og skriv løsningen på formen

$$y(t) = C \sin(\delta t) \sin(\bar{\omega} t)$$

ved hjelp av en trigonometrisk addisjonsformel, hvor C må bestemmes.

- Skissér løsningen når $A = 21$, $\omega_0 = 11$ og $\omega = 10$. Hva observerer du?
- Hvordan ser løsningen ut når $\omega = \omega_0$ i modellen? Fysisk kaller vi dette resonans.

- $y(t) = \frac{1}{16} e^{-t} (4t - 1 + e^{-4t}) + \frac{1}{5}$
 - $y(t) = e^{-t/2} \left(2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + t - 1$
- $C = A/(2\bar{\omega}\delta)$