

# Innlevering 6

Frist: Fredag 4. april kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

## Oppgaver til kapittel 11

1. Anta at  $A$  er en symmetrisk, reell  $n \times n$ -matrise hvor alle egenverdiene er strikt positive ( $> 0$ ).

a) La  $v$  være en egenvektor til  $A$  med tilhørende egenverdi  $\lambda$ . Vis at  $v^T A v > 0$ .

b) La nå  $u \neq 0$  være en vilkårlig vektor i  $\mathbb{R}^n$ . Vis at også  $u^T A u > 0$ .

**Hint:** Vi vet at  $A$  kan diagonaliseres som  $PDP^T$ , der  $P$  er en ortogonalmatrise hvis kolonner består av  $n$  ortogonale egenvektorer i  $\mathbb{R}^n$ , og  $D$  er diagonalmatrisen bestående av de positive egenverdiene. Vi kan spesielt da skrive  $u$  som en lineærkombinasjon av de ortogonale egenvektorene til  $A$ .

c) La  $u$  og  $w$  være vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . Bevis at operasjonen

$$\langle u, w \rangle = u^T A w$$

utgjør et indreprodukt på  $\mathbb{R}^n$  ved å vise symmetri, linearitet og positivitet.

## Oppgaver til kapittel 12

2. La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestem mengden av vektorer  $x \in \mathbb{R}^4$  som minimerer avstanden mellom  $Ax$  og  $b$ .

3. Bruk minste kvadraters metode på de overbestemte systemene

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\text{b) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

4. Regn ut andregradspolynomet som passer best til datapunktene

$$(0, 0), \quad (-1, 1), \quad (1, 1) \quad \text{og} \quad (2, 2)$$

på formen  $(x, y)$  ved hjelp av minste kvadraters metode. Merk at her er det to datapunkter med

samme  $x$ -koordinat. I praktiske situasjoner kan det være mange observasjoner ( $y$ -verdier) på samme lokasjon  $x$ , noe du kanskje har lært/vil lære mer om i statistikkemner. Hva blir verdien til polynomet i  $x = 3$ ?

5. La  $M$  være en av de følgende matrisene og avgjør hvilke av dem som er stokastiske og eventuelt regulært stokastiske:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Finn deretter likevektsvektorene i de tilfellene hvor matrisene genererer en Markovkjede.

6. Vis at en regulær stokastisk  $2 \times 2$ -matrise

$$M = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}$$

med  $a, b \in (0, 1)$  har en unik likevektsvektor.

## Oppgaver til kapittel 13

## 7. Løs initialverdi problemet

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

når

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvordan kan du vite at du har regnet riktig?

8. Skissér fase diagrammet til systemet  $y' = Ay$  og forklar hvordan egenverdiene bestemmer bildet når

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

## Noen tall svar

3.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -13/14 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{5. Grensen blir } \begin{bmatrix} 5/19 \\ 10/19 \\ 4/19 \end{bmatrix}.$$

7. Generelle løsninger:

$$\text{a) } y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\text{b) } y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

9. La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn en matrise  $P$  og en diagonalmatrise  $D$  slik at  $A = PDP^{-1}$ .

b) Bestem løsningen  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  av systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ y_3' = -y_1 - 3y_2 + y_3 \end{cases}$$

som oppfyller initialverdi betingelsen  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = -1$ ,  $y_3(0) = 2$ .

c) Hva skjer med løsningen når  $t \rightarrow \infty$ ?