TMA4115 Matematikk 3

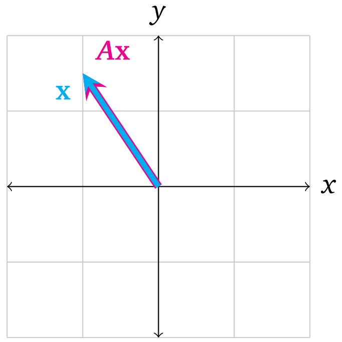
# *Innlevering 5*

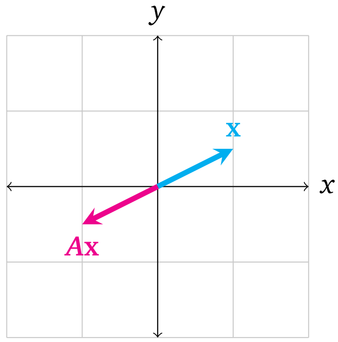
Frist: Fredag 21. mars kl. 21:00.

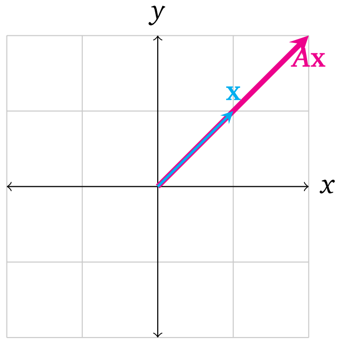
*Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.*

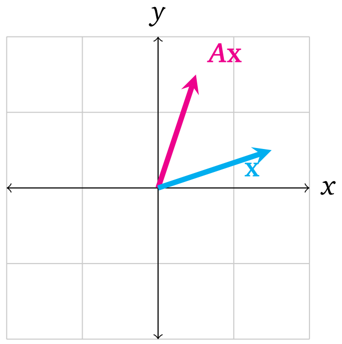
## Oppgaver til kapittel 10

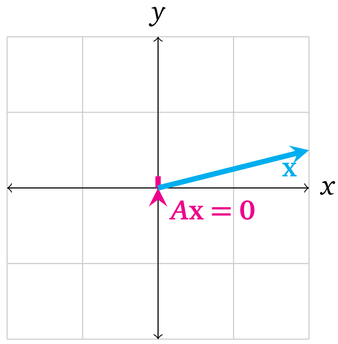
**1.** La $A$ være en $2 \times 2$-matrise og $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$. Avgjør om $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor i hvert av tilfellene **a)–e)** nedenfor og bestem i så fall tilhørende egenverdi.

**a)**



**b)**



**c)**



**d)**



**e)**



**2.** Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser:

**a)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} -1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & i \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**3.** Vi ser på egenverdiene til matrisene i deloppgavene **2 a)** og **2 b)**. Bestem egenrommet, geometrisk multiplisitet og algebraisk multiplisitet.

**4.** La $A$ være en $6 \times 6$-matrise slik at rangen til $A$ er 3.

**a)** Er 0 en egenverdi til $A$? Hvis ja, oppgi de mulige verdiene for dens algebraiske multiplisitet når:
**i.** $A$ har to ulike egenverdier.
**ii.** $A$ har fire ulike egenverdier.

**b)** Finn den algebraiske multiplisiteten til 0 slik at $A$ er altid diagonaliserbar i del **4(a)(i)** og i del **4(a)(ii)**.

**5.** I en sammenheng får du høre at noen har regnet ut at de komplekse egenverdiene til en reell $5 \times 5$-matrise er

$$3, \quad 2 \pm 4i, \quad \sqrt{7} \quad \text{og} \quad 6 - i.$$

Kan det stemme? Begrunn svaret.

**6.** La $A$ være en kvadratisk matrise.

**a)** Vis at hvis matrisen $A^2$ er nullmatrisen, så er 0 den eneste egenverdien til $A$.

**b)** Gi et eksempel på en matrise $A$ slik at 0 er den eneste egenverdien til $A$, men $A^2$ ikke er nullmatrisen.

**c)** La $A$ være en $2 \times 2$-matrise. Vis at hvis 0 er den eneste egenverdien til $A$, så er $A^2$ nullmatrisen. *(**Hint**: benytt den karakteristiske ligningen til en generell $2 \times 2$-matrise)*

**d)** Anta at $A^2$ er nullmatrisen. Vis at 0 er en egenverdi til $A$. *(**Hint**: benytt Teorem 10.4)*

## Oppgaver til kapittel 11

**7.** Bruk resultatene fra oppgave **3** til å bestemme om matrisene i deloppgavene **2 a)** og **2 b)** er diagonaliserbare eller ikke.

**8.** Ola har diagonalisert en matrise $A$ som

$$A = PDP^{-1}$$

med

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

mens Kari endte opp med

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Kan begge ha rett? Begrunn svaret uten å regne ut $A$.

**9.** Finn følgende matrisers egenverdier og tilhørende egenvektorer. Avgjør så om matrisene er diagonaliserbare:

**a)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**10.** Matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene $-1$, $0$ og $1$.

**a)** Finn en matrise $P$ og en diagonalmatrise $D$ slik at $B = PDP^{-1}$.

**b)** Regn ut $B^{2101}$.

**11.** La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineærtransformasjonen mellom andregradspolynom gitt ved

$$T(f) = (2x^2+1)f''(x) - f(x).$$

**a)** Bestem matrisen $A$ til $T$ med hensyn på basisen $(1, x, x^2)$ og finn egenverdiene til $A$.

**b)** Finn egenvektorene til $A$. Er $A$ diagonaliserbar?

**12.** I denne oppgaven skal vi se nærmere på Teorem 11.18, som sier at en symmetrisk, reell $n \times n$-matrise $A$ er ortogonalt diagonaliserbar. Vi ser her på matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**a)** Finn egenverdiene og egenvektorene til $A$. Justér lengden til egenvektorene slik at de har lengde lik 1.

**b)** Diagonalisér $A$ ved å finne en diagonalmatrise $D$ og en inverterbar matrise $P$.

**c)** Vis at egenvektorene til ulike egenverdier av $A$ faktisk er ortogonale.

**d)** Hva blir $P^\top P$ lik? Og dermed $P^{-1}$?

Konklusjonen vi kan trekke fra denne oppgaven er at for den reelle symmetriske matrisen $A$ gitt over, kan vi skrive diagonaliseringen som

$$A = PDP^\top,$$

hvor $P$ er en orthogonal matrise bestående av parvis ortonormale egenvektorer av $A$, og $D$ er diagonalmatrisen bestående av dens egenverdier. Dette holder generelt for alle reelle symmetriske matriser $A$. Sammenlign dette med tilfellet når $A$ kun er en diagonliserbar matrise, og ikke nødvendigvis reell og symmetrisk.

## Noen tallsvar

**2.** Egenverdier:

**a)** $-1$ og $3$ **b)** $0$ og $2$

**c)** $0$, $1$ og $\mathrm{i}-1$ **d)** $1$ og $3$

**9.**

**a)** $\lambda = 0$: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\lambda = \sqrt{2}\mathrm{i}$: $\left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$;

$\lambda = -\sqrt{2}\mathrm{i}$: $\left\{ \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

**10.** $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**11. a)** Egenverdier: $-1$ og $3$

**12. a)** Egenverdier: $-2$, $1$, og $2$