

Innlevering 4

Frist: Fredag 7. mars kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

Oppgaver til kapittel 9

1. Avgjør om vektorene

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

står ortogonalt på hverandre og finn deretter ut om de er lineært uavhengige.

2. Beregn den ortogonale projeksjonen av $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ned på underrommet $\text{Sp}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ i \mathbb{R}^3 .

3. La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Beregn $P_v(\mathbf{u})$.
- Hva blir $P_v(P_v(\mathbf{u}))$ lik?
- Finn ut hva som er minste avstand mellom \mathbf{u} og $\text{Sp}\{\mathbf{v}\}$ i \mathbb{R}^3 .
- Hva er $\dim(\text{Sp}\{\mathbf{v}\})^\perp$?

4. La $W = \text{Sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ hvor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Finn en ortogonal basis for W .
 - Regn ut standardmatrisen $[P_W]$ til den ortogonale projeksjonen $P_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ned på W .
 - Finnes det en 3×2 -matrise A slik at $[P_W]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle \mathbf{x} i \mathbb{R}^2 ? I så fall, finn den. *Hint*: Tenk geometrisk her.
5. La U være underrommet i \mathbb{R}^4 utspent av vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Lag en ortogonal basis for U ved hjelp av Gram-Schmidts metode.

b) Finn standardmatrisen $[P_U]$ til den ortogonale projeksjonen $P_U: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ned på U .

c) Hva er $\dim U^\perp$?

d) Finn en basis for det ortogonale komplementet U^\perp til U i \mathbb{R}^4 .

6. Vi ser på vektorrommet $\mathcal{C}[0, 1]$ av kontinuerlige funksjoner $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ med indreprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

a) Avgjør om funksjonene x og $\frac{1}{x^2+1}$ er ortogonale i $\mathcal{C}[0, 1]$.

b) Finn en ortogonal basis for $\text{Sp}\{1, x^2, x^4\}$.

c) Beregn lengden $\left\| \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right\|$.

$$\text{Vink: } \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C.$$

7. Vi ser på indreproduktrommet $\mathcal{C}[0, 1]$ av kontinuerlige funksjoner over $[0, 1]$, altså kontinuerlige funksjoner $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Regn ut vinkelen mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom x og $\cos x$; x og $\sin x$. Hvilken avstand er minst? *Hint*: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lengden til $f - g$.

c) Skissér x , $\cos x$ og $\sin x$ på intervallet $[0, 1]$. Gi en geometrisk forklaring på de numeriske verdiene du fant i del a)-b).

8. La Q være en såkalt *ortogonal* $n \times n$ -matrise definert utifra at kolonnene utgjør en *ortonormal* basis for \mathbb{R}^n .

a) Regn ut $Q^T Q$ og bestem Q^{-1} .

b) Vis at mulige verdier til $\det Q$ er bare ± 1 .

9. La U være en delmengde av et indreproduktrom V . U^\perp er et underrom av V .

Vis at det ortogonale komplementet

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ for alle } u \in U\}$$

Noen tallsvar

3. c) $\sqrt{20}$

5. a) $\{u, [1 \ 1 \ 1 \ 1]^\top\}$ b) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $[-1 \ 0 \ 1 \ 0]^\top$ og $[-2 \ 1 \ 0 \ 1]^\top$

6. c) $\sqrt{\pi}/2$