

Innlevering 3

Frist: Fredag 21. februar kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

Oppgaver til kapittel 7

1. Fra vektorromsaksiomene følger det at $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ for alle vektorer \mathbf{u} . Hva er generelt forskjellen på 0 og $\mathbf{0}$? Gi et eksempel.

2. Avgjør om følgende delmengder i \mathbb{R}^2 er underrom av \mathbb{R}^2 .

a) Alle x, y slik at $x + y = 0$.

b) Alle x, y slik at $x + y = 1$.

c) \mathbb{Q}^2

3. La \mathcal{M}_n utgjøre vektorrommet av komplekse $n \times n$ -matriser og vis at mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ for } 1 \leq j \leq i \leq n \right\}$$

av nedre triangulære $n \times n$ -matriser er et underrom av \mathcal{M}_n .

4. Avgjør om vektoren $[1 \ 2 \ 1 \ 0]^T$ ligger i $\text{Null}A$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $\text{Col}A$?

5. Finn en basis for kolonnerrommet, nullrommet og radrommet til følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 21 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -7 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -9 & 8 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene for begge matrisene.

6.

a) Finn en basis for \mathcal{P}_2 . Vis at det er en basis.

b) Hva er koordinatene til $1 + 2x + 3x^2$ i basisen du fant for \mathcal{P}_2 ?

c) Finn en basis for \mathcal{P}_n , der $n \geq 0$.

7. La A være en 4×5 -matrise. Begrunn svarene på følgende spørsmål.

a) Hva er maksimal mulig dimensjon til $\text{Col}A$?

b) Hvis $\dim \text{Null}A = 3$, hva er antall lineært uavhengige kolonner i A ?

c) Hvis $A \neq \mathbf{0}$, hva er minste mulige antall lineært uavhengige rader i A ?

d) Hva er $\dim \text{Row}(A^T)$ når systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 2 frie parametre?

e) Kan $\text{Null}A = \{\mathbf{0}\}$?

8. *Frivillig:* La V være et vektorrom. Kriteriet for at en delmengde $U \subseteq V$ er et underrom av V er at U er lukket under addisjon (definert på samme måte som i V), lukket under skalarmultiplikasjon (som i V) og inneholder nullvektoren $\mathbf{0}$ til V . Begrunn følgende spørsmål:

a) Som et alternativ til å undersøke om U er lukket under addisjon og multiplikasjon hver for seg, vil det være slik at den mer kompakte betingelsen at

$$c\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ og skalarer c er like god (det vil si, ekvivalent)?

b) Kan vi bytte ut betingelsen $\mathbf{0} \in U$ med at U bare må være en ikke-tom mengde?

Oppgaver til kapittel 8

9. Du får oppgitt at $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en lineærtransformasjon hvor

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn

- a) $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ b) standardmatrisen til T
 c) ut om T er injektiv og/eller surjektiv.

10. Gitt funksjonene

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{og} \quad R(x) = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 4x \end{bmatrix}$$

fra henholdsvis \mathbb{R}^2 til \mathbb{R} og \mathbb{R} til \mathbb{R}^3 , bestem standardmatrisen til $R \circ T$ og kjernen til T .

11. To mulige basiser for \mathbb{R}^2 er

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \quad \text{og} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Regn ut matrisen som beskriver basisskiftet fra \mathcal{C} til \mathcal{B} .

12. La $T: V \rightarrow W$ være en lineærtransformasjon mellom to vektorrom. Vis at T sender underrom av V til underrom av W —altså, hvis U er et underrom av V , vis at $T(U) = \{T(u) : u \in U\}$ er et underrom av W .

(Et av de viktigste eksemplene her er når U er lik $\ker T$, hvorpå T sender alle elementer i U til nullvektoren i W , slik at $T(\ker T) = \{0\}$ er det trivielle underrommet i W .)

13. La $D: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ være funksjonen som sender hvert polynom til den deriverte av polynomet:

$$D(p) = p'$$

La $G: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ være funksjonen som ganger polynomet den får inn med x :

$$G(p) = q, \quad \text{der} \quad q(x) = x \cdot p(x).$$

- a) Vis at D og G er lineærtransformasjoner.
 b) Finn bildet og kjernen til D og til G .
 c) Finn ut om D og G er injektive og/eller surjektive.
 d) Beskriv lineærtransformasjonen $(D \circ G) - (G \circ D)$.
 e) Nå begrenser vi oss til endeligdimensjonale polynomvektorrom. For hvert positive heltall n definerer vi lineærtransformasjoner

$$D_n: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1} \quad \text{og} \quad G_n: \mathcal{P}_{n-1} \rightarrow \mathcal{P}_n$$

på samme måte som vi definerte D og G . Velg en passende basis for hvert av vektorrommene \mathcal{P}_2 og \mathcal{P}_3 , og finn matrisene for D_3 og G_3 med hensyn på disse basisene.

Noen tallsvaer

5.

$$\text{Row } A = \text{Sp} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 58 \\ 4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 133 \\ 11 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 65 \\ 5 \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

9.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 17 \\ \frac{26}{5} \\ -5 \end{bmatrix}$$