

# Innlevering 2

Frist: fredag 7. februar kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

## Oppgaver til kapittel 3

1. La  $A$  være  $3 \times 4$ -matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

a) Løs ligningen  $Ax = 0$ .

b) Uttrykk løsningsmengden som et lineært spenn av vektorer i  $\mathbb{R}^4$  og avgjør om vektorene

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og/eller} \quad z = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ligger i spennet.

c) Hva blir generell løsning på  $Ax = b$  for en gitt vektor  $b \neq 0$  hvis du får oppgitt at

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er én løsning?

d) Finn ut hva  $b$  i forrige deloppgave må være og uttrykk  $b$  som en lineærkombinasjon av kolonnene til  $A$ .

2. La  $f$ ,  $g$  og  $h$  være polynomene

$$f(x) = 12x^2 - x - 13,$$

$$g(x) = 4x^2 + 3x + 4$$

$$\text{og } h(x) = 2x + 5.$$

Vi tenker på polynomene som abstrakte vektorer— og det er nettopp det vi skal gjøre senere i emnet. Med koordinater kan vi uttrykke for eksempel kan

$f(x)$  skrives som vektor  $\begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -13 \end{bmatrix}$  hvor første koordinat

er koeffisienten foran  $x^2$ , andre tall er koeffisienten foran  $x$ , osv. Vi skal se nærmere på det senere i kapittel om vektorrom. Allerede nå kan du sjekke at hvis man legger sammen to polynomer (av en gitt grad), så får man et nytt polynom (av samme grad). Og tilsvarende, at hvis man skalerer et polynom, så er det fortsatt et polynom (av samme grad).

a) Skriv  $g(x)$  og  $h(x)$  som vektorer (liknende eksempel for  $f(x)$ ) og forklar betydning til tallene i vektorene du lager.

b) Kan man skrive  $f$  som en lineærkombinasjon

$$f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

for konstanter  $a$  og  $b$ ?

**Hint:** Kan du lage en vektorligning ved hjelp av resultatene fra a)?

## Oppgaver til kapittel 4

3. Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

regn ut følgende:

a)  $A^3$     b)  $3A + 2B^T C$     c)  $(AC)^T$     d)  $C^T A^T$

4. La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 3i \\ 2 & 0 & 1+i \\ 0 & 2i & 1-i \end{bmatrix}.$$

a) Finn  $A^{-1}$  og  $B^{-1}$  ved gausseliminasjon.

b) Verifiser at du har regnet korrekt.

c) Løs ligningssystemene  $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  og  $Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

5. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 2+i & 1 \\ 9 & 1-i \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5i \end{bmatrix}$$

og avgjør hvilke av følgende matriseoperasjoner som er veldefinerte:

- a)  $AB$       b)  $BA$       c)  $AC$       d)  $BC^T$   
 e)  $A^5$       f)  $C^2v$       g)  $v^T v$       h)  $vv^T + C$   
 i)  $C^{-1}B^T$       j)  $v^T A$       k)  $v^T C v$

6. *Valgfri:* I Matematikk 1 ble du kjent med eksponentialfunksjonen  $x \mapsto e^x$  og i denne oppgaven skal vi gi en smakebit på hvordan man kan utvide eksponentialbegrepet til også å gjelde for enkelte kvadratiske matriser. På samme måte som at eksponentialfunksjonen på  $\mathbb{R}$  dukker opp i løsningen av førsteordens differensialligninger, vil eksponentialfunksjonen på  $\mathbb{R}^{n \times n}$  opptre naturlig i løsningen av

systemer av  $n$  førsteordens differensialligninger.

Vi ser her på det enkleste tilfellet

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

hvor  $A$  utgjør en  $n \times n$  diagonalmatrise.

a) Regn ut  $A^k$  for  $k = 2, 3, \dots$

b) Hva blir så formen på

$$I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k$$

for en generell  $k$ ?

c) Ved å huske at  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$  for  $x \in \mathbb{R}$ , kan vi nå definere eksponentialfunksjonen for matriser som

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k \right).$$

Bruk dette til å finne  $e^A$  for diagonalmatrisen ovenfor. (Vi har ikke definert grenser for matriser, men du kan tenke elementvis her.)

## Oppgaver til kapittel 5

7. La

$$v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Avgjør om  $v_1, v_2$  og  $v_3$  er lineært uavhengige.  
 b) Beskriv  $\text{Sp}\{v_1, v_2, v_3\}$  i  $\mathbb{R}^3$ .  
 c) Finn antall frie parametre til den generelle løsningen av ligningssystemet

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

8. Avgjør om vektorene nedenfor er lineært uavhengige:

a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{C}^2$ .

b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  og  $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  i  $\mathbb{R}^4$ .

9. Anta at  $Ax = 0$  har en ikke-triviell løsning. Begrunn om kolonnene til  $A$  er lineært uavhengige eller ikke.

## Oppgaver til kapittel 6

10. Regn ut determinanten til følgende matriser:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} i & 2 & i \\ 1 & -2i & 3 \\ 0 & 1+i & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 7i & 0 & 0 \\ \sqrt{2} + \frac{5}{2}i & -i & 0 \\ \sin(\pi/3) & 47i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Valgfri:  $e^A$  fra oppgave 6. Uttrykk svaret med det såkalte *sporet* («trace»)  $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_i$  (summen av diagonalelementene).

11. Finn arealet av parallelogrammet utspent av vektorene  $\mathbf{v}_1 = (3, 2)$  og  $\mathbf{v}_2 = (1, 5)$  i  $\mathbb{R}^2$ .

12. Du får oppgitt at  $\det A = 47$  for en  $6 \times 6$ -matrise  $A$ .

- Er  $A$  invertierbar? Hvis ja, hva blir  $\det(A^{-1})$ ?
- Hvor mange lineært uavhengige kolonner er det i  $A$ ?

13. Anta at en matrise  $A$  kan faktoriseres på formen

$$A = PDP^{-1},$$

hvor

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

og  $P$  er en invertierbar matrise.

Noen tallsvar

---

1.

a)  $\mathbf{x} = (1, -2, 1, 0)s + (2, -3, 0, 1)t$  for  $s, t \in \mathbb{R}$

d)  $(-4, -4, -4)$

3.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -5 & 60 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

4.

$$\text{a) } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ og } \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4+2i & 9+3i & 0 \\ 4-2i & -4-3i & -5i \\ 2-6i & -7+i & 0 \end{bmatrix}$$

c)  $(\frac{1}{2}, -1)$  og  $(\frac{7}{6}, -\frac{5}{3})$

a) Hva er størrelsen (antall rader og kolonner) til  $A$ ?

b) Beregn  $\det A$ .

c) Hvor mange frie parametre har den generelle løsningen på ligningen  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ?

6.

c)  $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$

7.

b)  $\mathbb{R}^3$

10.

a)  $-11$     b)  $2-2i$     c)  $7$     d)  $-20$

e)  $\det e^A = e^{\text{tr}A}$

11. 13

**12.**

a)  $1/47$

**13.**

b) 24