TMA4115 Matematikk 3

Innlevering 1

Frist: fredag 24. januar kl. 21:00.

Husk at dere kan benytte mattelaben aktivt for å få tilbakemelding på besvarelsen både før og etter innlevering.

Oppgaver til kapittel 1

1. Skriv disse tallene på normalform $z = x + iy$:

a) $(1-i)^2$ **b)** $\dfrac{1+3i}{2-i+\overline{3+2i}}$ **c)** $\dfrac{1}{i^5}$

2. Beregn polarformen til

a) $-1+\overline{2+3i}$ **b)** $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8$

og skissér tallene og deres komplekskonjugerte i det komplekse planet.

3. Finn og tegn alle røttene til $\sqrt[6]{-1}$ i det komplekse planet.

4. Gi en geometrisk tolkning av multiplikasjon av to komplekse tall $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$ basert på deres polarformer.

5. Vis at $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ og $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$.

6. Finn alle løsningene til ligningene

a) $z^3 = \sqrt{5}+2i$ **b)** $z^2+2iz-1-i=0$

c) $(z+1)^4 = (z-1)^4$

Hvordan kan du verifisere at du har funnet alle løsningene?

7. La $P(z) = z^3+az^2+bz+c$ være et tredjegradspolynom med **reelle** koeffisienter a, b, c.

a) Anta at z er slik at $P(z) = 0$. Begrunn at $P(\bar{z}) = 0$. *Hint: Bruk regneregler for å vise at* $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$.

b) Kombiner **a)** og Teorem 1.11 (kapittel 1) for å begrunne at $P(z) = 0$ alltid har minst én reell løsning.

Oppgaver til kapittel 2

8. Finn først antall pivotelementer til følgende matriser og utfør deretter radoperasjoner slik at de blir på redusert trappeform:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Løs følgende ligningssystemer ved gjelp av gausseliminasjon og beskriv løsningsmengdene:

a) $\begin{cases} 2x+y \quad +3w = 5 \\ -x \quad +z+2w = -2 \\ x+y \quad + w = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a+b \quad +3d = 7 \\ -a \quad +c+2d = -1 \\ a+b \quad + d = 6 \end{cases}$

Snarvei: Hva med å løse systemene samtidig ved å inkludere begge høyresidene i samme totalmatrise? Dette tilsvarer å løse en matriseligning

$$AX = B$$

hvor A er en 3×4-matrise, X utgjør en 4×2-matrise og B er en 3×2-matrise.

10. Vi ser videre på ligningssystemene i oppgave 9.

a) Kan x og a velges som frie variabler?

b) Hvordan kan du verifisere at du har funnet korrekte løsninger?

11. Løs ligningssystemene

a) $\begin{cases} 3x_1+8x_2-x_3 = -10 \\ 8x_1+6x_2-5x_3 = -23 \\ -6x_1+x_2+5x_3 = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} iz+3w-u = 1+i \\ 2z-4iw = 2 \end{cases}$

Flere oppgaver på neste side.

12. Kari har funnet ut at løsningene til et ligningssystem er lik

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

mens Ola mener at de er på formen

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Kan begge ha rett? Begrunn svaret.

13. Finn alle løsninger av ligningssettet, der utvidet matrise har trappeform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & b & c \end{array}\right]$$

for alle forskjellige reelle verdier av a, b og c.

Noen tallsvar

1.

a) $-2\mathrm{i}$ **b)** $-\frac{2}{17} + \frac{9}{17}\mathrm{i}$ **c)** $-\mathrm{i}$

2.

a) $\sqrt{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arctan 3}$ **b)** $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}$

3. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm \mathrm{i})$, $\pm i$ og $\frac{1}{2}(-\sqrt{3} \pm \mathrm{i})$.

6.

a) $\sqrt[3]{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+2\pi n\right]}$ for $n = 0, 1, 2$.

b) $-\mathrm{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$.

c) 0 og $\pm\mathrm{i}$.

8.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.

a) $x = 4 - 2t$, $y = -3 + t$, $z = 2 - 4t$ og $w = t \in \mathbb{R}$

b) $a = 1 - 2t$, $b = 5 + t$, $c = -4t$ og $d = t \in \mathbb{R}$

11.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 5$.

b) $z = 1 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}t$, $w = 1 + t$ og $u = t \in \mathbb{C}$