

Kapittel 8

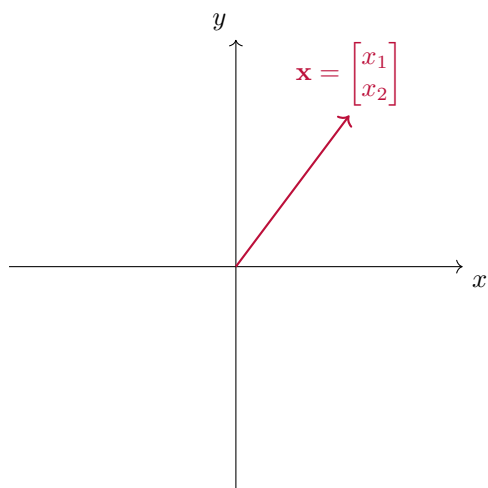
Ekstra: Mer om basisbytte

Dette er et ekstranotat om basisbytte. Dette kapitlet inneholder kun en utdypning av konseptet basisbytte, og kan derfor sees vekk fra om man ikke føler behov for utdypning.

I et generelt vektorrom så snakker vi om noen abstrakte ting vi kaller vektorer. Det eneste vi vet om dem er at de oppfyller vektorromsaksiomene. Det er ikke før vi jobber med ett konkret vektorrom at vi kan beskrive disse vektorene konkret. For eksempel i det klassiske Euklidske vektorrommet \mathbb{R}^n , så kan vi beskrive vektorene våre som kolonner av tall:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Videre kan vi se på dem som punkter i et n -dimensjonalt rom, eller piler fra origo til det punktet. Lar vi $n = 2$, så kan vi lett visualisere dette ved å tegne xy -planet og markere vektorene som enten punkter eller piler:



Innad i et vektorrom så har vi noe vi kaller *basis*. Vi husker at det er en ordnet mengde vektorer som både er lineært uavhengig og som spenner ut vektorrommet. I \mathbb{R}^2 har vi for eksempel standardbasisen

$$\mathcal{E} = \left(\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Siden basisen spenner ut rommet og er lineært uavhengig, så vet vi at vi kan skrive enhver vektor i rommet som en lineærkombinasjon av vektorene i basisen.

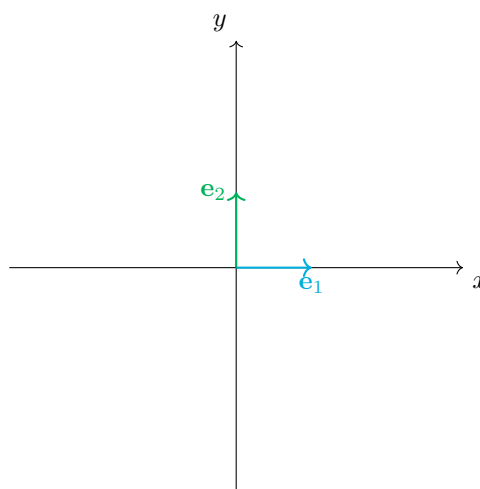
For eksempel i \mathbb{R}^2 med standardbasisen så har vi at

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$$

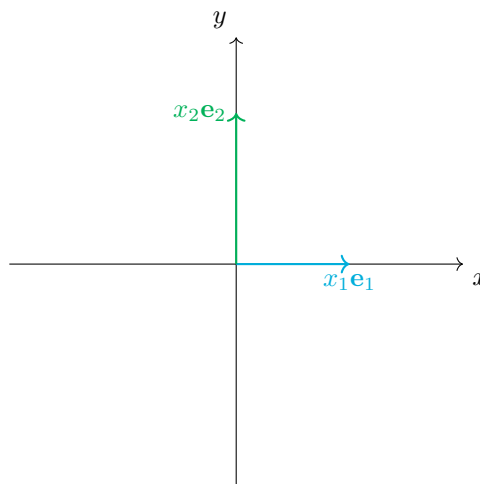
Vi kaller x_1 og x_2 for koordinatene til \mathbf{x} med hensyn til basisen \mathcal{E} , og skriver

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

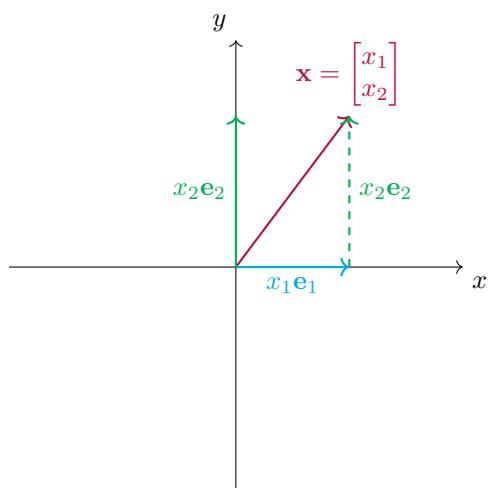
for å samle informasjonen. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ kaller vi koordinatvektoren til \mathbf{x} med hensyn på basisen \mathcal{E} . Vi kan illustrere dette visuelt på følgende vis. Først tegner vi opp vektorene i standardbasisen vår:



Så skalerer vi disse med henholdsvis x_1 og x_2 , altså koordinatene til \mathbf{x} :



Også legger vi sammen disse for å få \mathbf{x} :



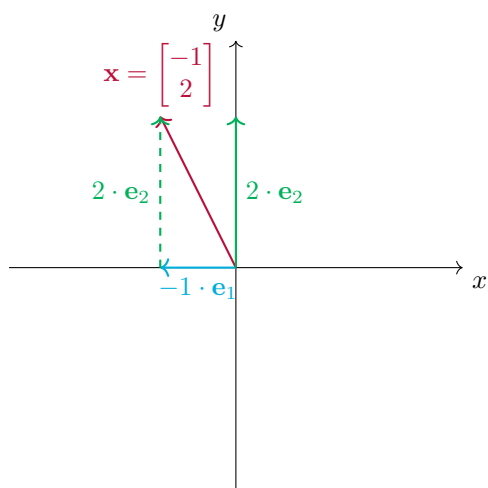
La oss ta et helt konkret eksempel.

Eksempel 8.1. Vi har vektoren $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, da har vi

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

siden

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



△

Men hva så, kan man tenke? Vi ser jo her at koordinatvektorene våre er like de faktiske vektorene våre. Det blir mer spennende om vi går til andre basiser enn standardbasisen.

Eksempel 8.2. La

$$\mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

være en basis for \mathbb{R}^2 . Vi ser at koordinatvektoren til

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

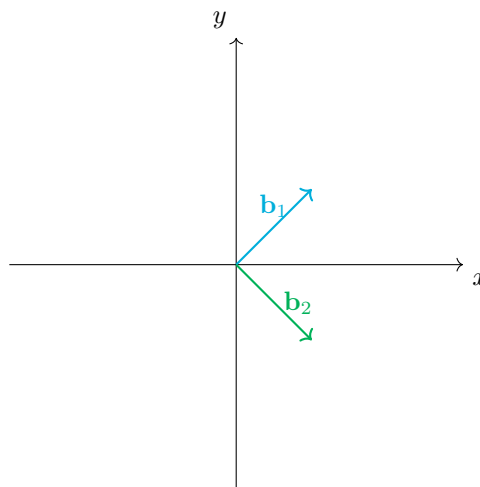
med hensyn på basisen \mathcal{B} er gitt ved

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

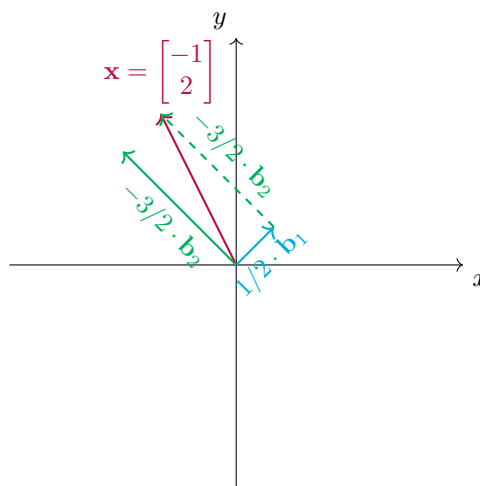
siden

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi illustrerer dette ved først å tegne opp basisvektorene våre



skalere dem med $1/2$ og $-3/2$, og til slutt addere dem



△

Basisbytte i \mathbb{R}^2

La oss først se på hvordan vi går fra koordinatvektorer med hensyn på en vilkårlig basis til koordinatvektorer med hensyn på standardbasisen (og tilbake). Vi begynner med ett eksempel

Eksempel 8.3. La oss fortsette å se på standardbasisen

$$\mathcal{E} = \left(\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right),$$

samt vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Da har vi

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Altså er basisbyttematrisen fra \mathcal{B} til standardmatrisen gitt ved matrisen hvor kolonnene er vektorene i \mathcal{B} . Hvis vi ønsker å gå fra standardbasen til \mathcal{B} , så bruker vi at $[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]$ er invertierbar, og får

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

Med andre ord er basisbyttematrisen i motsatt retning kun inversmatrisen. \triangle

Vi kan se at vi får det samme generelt. La oss se på standardbasen

$$\mathcal{E} = \left(\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

og en vilkårlig annen basis

$$\mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} \right)$$

For en vilkårlig vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, med koordinatvektor

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

har vi da

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{x} &= a_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Altså er basisbyttematrisen fra \mathcal{B} til standardmatrisen gitt ved matrisen hvor kolonnene er vektorene i \mathcal{B} . Hvis vi ønsker å gå fra standardbasen til \mathcal{B} , så bruker vi at $[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]$ er invertierbar, altså er

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}.$$

Med andre ord er basisbyttematrisen i motsatt retning kun inversmatrisen.

Så hvordan går vi fra en koordinatvektor i én basis til en koordinatvektor i en annen basis? La oss si at vi har basisene

$$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$$

og

$$\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2).$$

For en vilkårlig vektor \mathbf{x} i \mathbb{R}^2 , kan vi nå velge å se på koordinatvektoren med hensyn på enten \mathcal{B} eller \mathcal{C} , altså enten

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

eller

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Informasjonen fra den første, forteller oss at

$$\mathbf{x} = b_1 \mathbf{b}_1 + b_2 \mathbf{b}_2$$

og den andre forteller oss at

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{c}_1 + c_2 \mathbf{c}_2$$

(Merk: Her skiller vi mellom bokstaver i fet skrift som viser til vektorer og bokstaver i vanlig skrift som viser til koordinater/skalarer.)

Hvis vi setter sammen likhetene får vi dermed at

$$b_1 \mathbf{b}_1 + b_2 \mathbf{b}_2 = c_1 \mathbf{c}_1 + c_2 \mathbf{c}_2$$

eller

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

eller

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2] [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$$

Hvis vi bruker diskusjonen vår fra hvordan vi går fra standardmatrisen til en annen, ser vi at ved å gange likningen over med inversmatrisen til $[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]$, har vi

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}] [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Altså får vi at basisbyttematrisen fra \mathcal{B} til \mathcal{C} er gitt ved

$$[[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}]$$

Generelle vektorrom

Dette lar seg generalisere til n -dimensjonale vektorrom, og vi får tilbake Teorem 8.16 fra notatet om lineærtransformasjoner:

Teorem 8.4. *La V være et n -dimensjonalt vektorrom, og la $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ og $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$ være to basiser for V . Da finnes en $n \times n$ -matrise A slik at*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = A \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

for alle vektorer \mathbf{x} i V .

Kolonnene i A er \mathcal{C} -koordinatvektorene til basisvektorene i \mathcal{B} :

$$A = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}].$$

Vi tar med eksempler fra ekstraoppgavene for å videre illustrere

Eksempel 8.5. La

$$\mathcal{B} = \left(\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

og

$$\mathcal{C} = \left(\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

være basiser for \mathbb{R}^2 . Finn matrisene A og B , slik at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ og $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ for alle \mathbf{x} i \mathbb{R}^2 .

La \mathcal{C} -koordinatvektorene til basisvektorene i \mathcal{B} være gitt som henholdsvis

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Altså må

$$\mathbf{b}_1 = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2$$

og

$$\mathbf{b}_2 = c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2.$$

Første kolonne i A finner vi ved å regne ut $A\mathbf{e}_1$, og andre kolonne ved å regne ut $A\mathbf{e}_2$. Bruker vi nå at

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 \text{ og } [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2$$

får vi

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

og

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Da vet vi at

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}]$$

som vi gjenkjenner fra notatene. For å finne a, b, c og d , løser vi de lineære uttrykkene for \mathbf{b}_1 og \mathbf{b}_2 vi fikk fra koordinatvektorene:

$$a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$$

og

$$c\mathbf{c}_1 + d\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_2$$

Vi løser disse simultant ved å radredusere den utvidede matrisen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/24 & 7/24 \\ 0 & 1 & 7/24 & 13/24 \end{array} \right]$$

Vi leser dermed ut at

$$A = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende kan vi finne

$$B = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -13 & 7 \\ 7 & -13 \end{bmatrix}.$$

For å finne A kunne vi også satt opp matriseligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

og multiplisert fra venstre med inversmatrisen

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 5 \cdot 5} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

△

Eksempel 8.6. a) Finn en basis \mathcal{B} for \mathcal{P}_2 slik at

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p .

b) Finn en basis \mathcal{C} for \mathcal{P}_2 slik at

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$$

er koordinatene til et andregradspolynom p .

c) La p være gitt ved $p(x) = x^2$. Finn koordinatene til p med hensyn på henholdsvis \mathcal{B} og \mathcal{C} .

d) Finn lineærtransformasjoner som oversetter mellom disse basisene, altså

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{og} \quad S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

slik at

$$T([p]_{\mathcal{B}}) = [p]_{\mathcal{C}} \quad \text{og} \quad S([p]_{\mathcal{C}}) = [p]_{\mathcal{B}}$$

for alle polynomer p . Sjekk at T og S gir riktig resultat for koordinatene du fant del c).

Løsning:

a) Dette er standardbasen $1, x$ og x^2 .

Forklaring: Vi ønsker å skrive et vilkårlig andregradspolynom på formen $p(x) = p(0)f_1(x) + p'(0)f_2(x) + \frac{p''(0)}{2}f_3(x)$. Dette er akkurat hva $f_1 = 1, f_2 = x$ og $f_3 = x^2$ tilfredstiller: Gitt $p(x) = a + bx + cx^2$ ser vi at $p(0) = a, p'(0) = b$ og $\frac{p''(0)}{2} = c$ ved regning; dette er akkurat koeffisientene foran $1, x$ og x^2 . Alternativ løsning: For en mer systematisk fremgangsmåte kan du følge metoden som er beskrevet i del b).

b) Vi må finne tre polynom $e_1(x), e_2(x)$ og $e_3(x)$ som utgjør en basis slik at et vilkårlig polynom kan skrives på formen $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$ (da blir koordinatene $\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$). Dette skjer akkurat dersom $e_1(x)$ tilfredstiller

$$e_1(0) = 1 \quad e_1(1) = 0 \quad e_1(2) = 0,$$

$e_2(x)$ tilfredstiller

$$e_2(0) = 0 \quad e_2(1) = 1 \quad e_2(2) = 0,$$

$e_3(x)$ tilfredstiller

$$e_3(0) = 0 \quad e_3(1) = 0 \quad e_3(2) = 1$$

(sett inn i likningen for $p(x)$ uttrykt ved e_i 'ene for å se dette).

e_1 : Polynomet kan skrives på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2$, og vi krever – fra likningene for e_1 – ovenfor at

$$a_0 = 1 \quad a_0 + a_1 + a_2 = 0 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0.$$

Dette er tre likninger med tre ukjente, og vi bruker radreduksjon for å se at løsningen er $a_0 = 1, a_1 = -\frac{3}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{2}$. Polynomet er derfor $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. Alternativ løsning: $e_1(1) = 0$ og

$e_1(2) = 0$ betyr at $(x - 1)$ og $(x - 2)$ er faktorer av e_1 . Derfor må $e_1(x) = a(x - 1)(x - 2)$. Kravet $e_1(0) = 1$ gir nå $1 = a \cdot (-1) \cdot (-2)$ slik at $a = \frac{1}{2}$. Derfor er $e_1(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$. Du kan gange ut for å se at dette er det samme polynomet som vi fant ovenfor.

e_2 : Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_2(x) = 2x - x^2$.

e_3 : Samme fremgangsmåte som for e_1 – med litt forskjellige likninger – gir polynomet $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$.

Vi har nå tre polynom e_1, e_2 og e_3 som spenner \mathcal{P}_2 (det er konstruert slik at alle polynom kan skrives $p(x) = p(0)e_1(x) + p(1)e_2(x) + p(2)e_3(x)$). De er da automatisk lineært uavhengige siden $\dim \mathcal{P}_2 = 3$.

c) Koordinatene til x^2 :

$$[x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \frac{p''(0)}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[x^2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

d) Husk at en 3×3 -matrise er bestemt av hvordan den endrer standardbasen i \mathbb{R}^3 .

T : I koordinatene til standardbasen for \mathcal{P}_2 har vi at $[1]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_1$, $[x]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_2$ og $[x^2]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_3$, hvor \mathbf{e}_i er den i -te standardbasen for \mathbb{R}^3 , per definisjon av koordinater til en basis. Fra kommentaren ovenfor må vi ha at $T[1]_{\mathcal{B}} = [1]_{\mathcal{C}}$, $T[x]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{C}}$, $T[x^2]_{\mathcal{B}} = [x^2]_{\mathcal{C}}$. Basen \mathcal{C} er konstruert slik at første koordinat er evaluering i 0, andre koordinat er evaluering i 1 og tredje koordinat er evaluering i 2. Derfor har vi

$$T = [T\mathbf{e}_1 \quad T\mathbf{e}_2 \quad T\mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

S : Samme fremgang som for T . Husk at $e_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $e_2(x) = 2x - x^2$ og $e_3(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$. I koordinatene til \mathcal{B} har vi da at $[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $[e_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Dette gir

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at matrisen gir riktig endring av koordinater for x^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dette viser at S endrer koordinatene til x^2 som ønsket. Gjør tilsvarende regning for T , eller vis at T og S er inverser ved å multiplisere de sammen og få I_3 .