TMA4115 ØF uke 11

23. mars 2021

Problem 1

(a) Diagonalisere følgende matrise $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Egenverdier og egenvektorer til A: Husk at egenverdier til A er roter til $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} - \lambda & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} \\
&+ \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\
&= \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right)\left[\left(\tfrac{5}{2} - \lambda\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right] = \left(\tfrac{1}{3} - \lambda\right)(\lambda - 1)(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

hvor vi brukt kofaktorekspansjon langs siste råd. Dermed er egenverdier til A er $\lambda_1 = 1/3, \lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 4$.

Egenvektor til $\lambda = 1/3$: Husk at egenvektor er i nullrommet til $A - \frac{1}{3}I$:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Dermed $t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor til A. Vi tar $t = 1$, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenvektor til $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Dermed $t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ er egenvektor til A. Vi tar $t=1/\sqrt{2}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$.

Egenvektor til $\lambda=4$:

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{2}-4 & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2}-4 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{11}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0.$$

Dermed $t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ er egenvektor til A. Vi tar $t=1/\sqrt{2}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. Da få vi følgende diagonalisering til A:

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},$$

som gir $A=PDP^{-1}$ med $P=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ og $D=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

(b) Bruk diagonalisering til A for å beregne A^{10}.

$A^2=(PDP^{-1})(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^2P^{-1}$ og da få vi $A^{10}=PD^{10}P^{-1}$. Dermed

$$A^{10}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3^{10}} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4^{10}+1 & 4^{10}-1 & 0\\ 4^{10}-1 & 4^{10}+1 & 0\\ 0 & 0 & 2\cdot 3^{-10}\end{bmatrix}.$$

(c) La v_1, v_2, v_3 bli egenvektorer til A. Bruk (b) for a finne $A^{10}x$ til en lineærkombinasjon $x=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$.

$$Ax=A(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)=c_1Av_1+c_2Av_2+c_3Av_3=c_1\lambda_1v_1+c_2\lambda_2v_2+c_3\lambda_3v_3$$

dermed

$$A^{10}x=c_1\lambda_1^{10}v_1+c_2\lambda_2^{10}v_2+c_3\lambda_3^{10}v_3$$

(d) Beregne

$$A^{10}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Hint: Finn c_1, c_2, c_3 slik at $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ og bruk (c).

Da $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ er en basis, egenbasisen, til $\mathbb{R}^3$ finnes det unike koeffisenter c_1, c_2 and c_3 slik at

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3.$$

Man ses at $c_1 = 1$, $c_2 = -\sqrt{2}$ og $c_3 = 0$, eller bruk at $P^{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Da få vi

$$A^{10}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\cdot 3^{-k}\end{bmatrix}.$$

Problem 2 Matrise $A = \begin{bmatrix}5 & -2\\-2 & 5\end{bmatrix}$ har følgende diagonalisering

$$A = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

(a) Vis at $P^TP = I$ og $PP^T = I$, dermed $P^{-1} = P^T$.

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$

og lignende $PP^T = I$. Dermed $P^{-1} = P^T$ hvis kolonner til P er orthonormal.

Det holder også for $n \times n$-matrise: Husk at $P^T = \begin{bmatrix}v_1^T\\v_2^T\\\vdots\\v_n^T\end{bmatrix}$ for $P = (v_1\, v_2\, ...v_n)$.

Så $P^TP = (v_i^T \cdot v_j)_{i,j=1}^n$. Da indreprodukt er symmetrisk følger $P^TP = PP^T$ og dermed $P^T = P^{-1}$.

(b) Bruk diagonalisering til A for å diagonalisere $B = \begin{bmatrix} 5+a & -2 \\ -2 & 5+a \end{bmatrix}$ med $a \neq 0$.

Løsningsforslag 1:

La v være en egenvektor til A for egenverdi λ.

$$(A + aI)v = Av + av = \lambda v + av = (\lambda + a)v.$$

Så A og B har de samme egenvektorene v_1, v_2 med B's egenverdier er $\lambda_i + a$, $i = 1, 2$. Diagonalisering til B er

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+a & 0 \\ 0 & 7+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Løsningsforslag 2:

Beregne egenverdier og egenvektorer til A:

$$\det \begin{bmatrix} 5+a-\lambda & -2 \\ -2 & 5+a-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5-(\lambda-a) & -2 \\ -2 & 5-(\lambda-a) \end{bmatrix}$$

La $\mu = \lambda - a$. Da få vi at

$$\det \begin{bmatrix} 5+a-\lambda & -2 \\ -2 & 5+a-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 5-\mu \end{bmatrix},$$

som er karakteristik polinom til A. Dermed $\mu_1 = 3$ og $\mu_2 = 7$. Husk at $\mu = \lambda - a$ og da er egenverdier til A $\lambda_1 = 3 + a$ og $\lambda_2 = 7 + a$.

Egenvektor til $\lambda + a$ er i nullrommet til $B - (\lambda + a)I$, men $B - (\lambda + a)I = A + aI - \lambda I - aI = A - \lambda I$. Dermed A og B har de samme egenvektorene. Obs egenverdier ti A og B er ikke det samme.