Oppgave 1 Vi skal finne polynomer som passer til punktene

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Det finnes et unikt tredjegradspolynom som går gjennom alle punktene. Sett opp et ligningssystem for koeffisientene til dette polynomet, og finn koeffisientene.

Løsning: Da $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ skal gå gjenmom alle disse punktene, få vi følgende ligningsystemet:

$$\begin{aligned}
p(0) &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 1 \\
p(1) &= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -1 \\
p(2) &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \\
p(3) &= a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 1.
\end{aligned}$$

Dermed må vi løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bruk Gausseliminasjon for å finne koeffisientene:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 7 \\ -7.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $p(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 7x^2 - \frac{15}{2}x + 1$.

(b) Bruk minste kvadraters metode til å finne koeffisientene til en andregradspolynom som passer best.

Løsning:

Fra punktene gitt får vi

$$\begin{aligned} p(0) &= d = 1 \\ p(1) &= a+b+c = -1 \\ p(2) &= 4a+2b+c = 2 \\ p(3) &= 9a+3b+c = 1. \end{aligned}$$

Systemet har koeffisentmatrise

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 49 & 18 & 7 \\ 18 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dermed normalligningene er

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 49 & 18 & 7 \\ 18 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

da mindste kvadraters metode gir

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix},$$

altså

$$p(x) = 0.25x^2 - 0.45x + 0.55.$$

Oppgave 2

(a) Finn likevektsvektorene til den stokastiske matrisen $M = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$.

Løsning: Vi vet at egenvektor tilhørende egenverdi lik 1 etter normalisering er likehetsvektor: Egenvektor til $\lambda = 1$ er $t \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $t = 1/10$ gir likehetesvektor $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$.

(b) M har følgende diagonalisering $M = SDS^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 3 \\ 0 & -1.5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 2/5 & -4/15 & 2/5 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

Bruk dette for a finne $A^k\mathbf{x}_0$ til den sannsynlighetsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Finne $\lim_{n\to\infty} A^k\mathbf{x}_0$.

Løsning: M har egenverdier $0.2, 0.5$ og 1 og tilhørende egenvektorer er

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ er basisen i $\mathbb{R}^3$, finnes unike koeffisenter c_1, c_2, c_3 slik at

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$$

og $S^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Dermed

$$\begin{aligned} A^k\mathbf{x}_0 &= c_1\, A^k\mathbf{u}_1 + c_2\, A^k\mathbf{u}_2 + c_3\, A^k\mathbf{u}_3 \\ &= c_1\,(0.2)^k\mathbf{u}_1 + c_2\,(0.5)^k\mathbf{u}_2 + c_3\,\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

som konverger til $c_3\,\mathbf{u}_3 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, likehetsvektor $\mathbf{q}$.